Interrogation 18 d'entrainement
Polynômes

1. **Restituer le cours.**
   - 1.1 Définir le polynôme dérivé.
   - 1.2 Enoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
   - 1.3 Enoncer les deux formules de Taylor pour les polynômes.
   - 1.4 Enoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
   - 1.5 Définir une racine de multiplicité m.
   - 1.6 Caractériser la multiplicité à l'aide des dérivées.
   - 1.7 Préciser l'écriture de l'ensemble des nains aimables ayant de l'humour.

   Révisions
   - 1.8 Enoncer la propriété donnant la transposée du produit.
   - 1.9 Définir une matrice symétrique/antisymétrique.
   - 1.10 Enoncer les opérations élémentaires.
   - 1.11 A l'aide des opérations élémentaires donner la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice.
   - 1.12 Enoncer la proposition reliant l'équivalence et la négligeabilité entre deux fonctions (Prop II.3).
   - 1.13 Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique ? (Prop II.4)
   - 1.14 Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
2. **Déterminer un degré.**
   - 2.1 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geqslant 3$ et $Q = XP - X^2P^{(3)} + 5X^4P''$. Déterminer $\deg(Q)$.
   - 2.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{4n+1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) X^k$. Déterminer $\deg(P)$.
   - 2.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n$ et $Q = P(X+1) - P(X-1)$. Déterminer $\deg(Q)$.
   - 2.4 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geqslant 2$ et $Q = \left(X^3 - 5\right)P'' + X^2 \circ P$. Déterminer $\deg(Q)$.
   - 2.5 Soient $n \in \mathbb{N}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)^2 X^k$ et $Q = P(X) + P(-X)$. Déterminer $\deg(Q)$.
   - 2.6 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geqslant 2$ et $Q = P \circ (P + 3X)$. Déterminer $\deg(Q)$.
   - 2.7 Soient $n \geqslant 2$, $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} X^k}{k}$ et $Q = P - X^2P''$. Déterminer $\deg(Q)$.
   - 2.8 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geqslant 3$ et $Q = X^2P + X^2 \circ P + X^2 + P$. Déterminer $\deg(Q)$.
   - 2.9 Quel est le degré de R le reste de la division euclidienne de $\displaystyle\sum_{k=0}^{11} (-1)^k X^k$ par $X - 1$?
   - 2.10 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{(2k)!}$ et $Q = P\left(X^2\right) - \left(P\left(X^2\right)\right)'' - \frac{X^{2n}}{(2n)!}$. Déterminer $\deg(Q)$.
   - 2.11 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geqslant 2$ et $Q = P \circ P \circ P - P^3$. Déterminer $\deg(Q)$.
   - 2.12 Soient $n \in \mathbb{N}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^k$. Déterminer $\deg(Q)$.

   Calculer une composition.

   En justifiant, calculer le polynôme et le degré demandés.
   - 2.13 On pose $P = X^2 - 2X + 3$ et $Q = 2X + 3$. Calculer $P \circ Q$ et donner son degré.
   - 2.14 On pose $P = \frac{X^2}{3}$. Calculer $P \circ P$ et donner son degré.
   - 2.15 On pose $P = X^5$ et $Q = 2X^2 + 1$. Calculer $P \circ Q$ et donner son degré.
   - 2.16 On pose $P = 7X + 4$ et $Q = X^8 - X^6 + X^4 + 1$. Calculer $P \circ Q$ et donner son degré.
   - 2.17 On pose $P = \frac{X}{2} + 1$. Pour $n \geqslant 1$, calculer $R = \underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ fois}}$ et donner son degré.

3. **Résoudre une équation polynomiale.**
   3.1 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $X^2P = P^2$.
   3.2 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $P'P'' = 6P$.
   3.3 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $\left(2X^2+X+1\right)P'' = (X+1)P' + 2P$.
   3.4 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $P\left(X^3\right) = \left(X^2+X+1\right)P$
   3.5 Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $P = P(X+1)$.
   3.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$, $P' + P = \frac{X^n}{n!}$.
4. **Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$.**
   4.1 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 + (7-2i)X^2 - (1+14i)X - 7$.
   4.2 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 16$.
   4.3 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 + X^2 + 5X - 7$.
   4.4 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 11X^3 + 27X^2 + 11X - 28$.
   4.5 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 - 3X^5 + 5X^4$.
   4.6 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 4X^3 - 3X^2 + 4X - 4$.
   Remarquer que i est une racine de P.
5. **Déterminer la limite d'une suite complexe.**
   5.1 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$.
   5.2 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
   $$u_n = \frac{12n + (5+2i)n^2 - (6+3i)n^3}{1 + 3n^2 - 5n^3}.$$
   5.3 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{in}$.
   5.4 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 5 + \frac{3}{n} + i(-1)^n$.
   5.5 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = -5+3i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{-1+i}{7}u_n$.
6. **BONUS (ne sera pas à l'interro) : calculer une évaluation.**
   6.1 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $P = (X+1)^2$. Calculer $P(A)$.
   6.2 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$, avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(A)$.
   6.3 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[X^k - k2^{k-1}(X-2)\right]$. Calculer $P(A)$.
   6.4 On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $P = 1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6$. Calculer $P(f)$ pour l'opérateur de composition.
   6.5 On pose $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + 2$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kX^k$. Calculer $P(f)$ pour l'opérateur de composition.
   6.6 On pose $f : x \mapsto x^2+1$ et $P = X^2 - 2X + 1$. Calculer $P(f)$ pour l'opérateur de composition.