Correction de l'interrogation 18 d'entrainement Polynômes

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient $n \geqslant 1$, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Alors le polynôme dérivé de P est donné par

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_{k+1} X^k.$$

1.2 Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

1.3 Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ donc $\deg(P) \leqslant n$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \qquad \text{et} \qquad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

1.4 Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$

1.5 Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si

$$(X-\alpha)^m \text{ divise } P \qquad \text{et} \qquad (X-\alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P.$$

1.6 Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a

$$\alpha \text{ racine de } P \text{ de multiplicité } m \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

1.7 $\mathbb{K}_2[X]$ désigne bien l'ensemble des polis gnomes parlant au second degré.
Les puristes auront remarqué que les gnomes qui sont constants et prennent tout au premier degré (faudrait savoir il sont de premier degré ou constant ?!) sont aussi dans $\mathbb{K}_2[X]$ (car $\mathbb{K}_0[X] \subseteq \mathbb{K}_1[X] \subseteq \mathbb{K}_2[X]$). Oui mais justement la réponse est à prendre au second degré, vous suivez ?

2. **Déterminer un degré.**

2.1 On a $\deg(XP) = \deg(X) + \deg(P) = 1 + n$. Mais aussi $\deg\left(X^2 P^{(3)}\right) = \deg\left(X^2\right) + \deg\left(P^{(3)}\right) = 2 + n - 3 = n - 1$, car $n \geqslant 3$. Enfin $\deg\left(5X^4 P''\right) = \deg\left(5X^4\right) + \deg(P'') = 4 + n - 2 = n + 2$ car $n \geqslant 2$. Donc

$$\deg\left(5X^4 P''\right) > \deg(XP) \geqslant \deg\left(X^2 P^{(3)}\right).$$

Par conséquent,

$$\deg(Q) = \deg\left(XP - X^2 P^{(3)} + 5X^4 P''\right) = \deg\left(5X^4 P''\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\deg(Q) = n + 2.}$$

2.2 On note que si k est pair, $k = 2p$, $\cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \cos^2(p\pi) = \left((-1)^p\right)^2 = 1$ et si $k = 2p+1$ est impair, $\cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \cos^2\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Dès lors, si $n \geqslant 1$,

$$P = 0 + X^{4n} + \sum_{k=0}^{4n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) X^k.$$

Conclusion, $\boxed{\deg(P) = 4n}$ ce qui reste vrai si $n = 0$.

2.3 Par la formule du binôme de Newton, si $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} Q = (X+1)^n - (X-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1 - (-1)^{n-k}\right) X^k \\ &= 0 + \underbrace{2n}_{\neq 0} X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \left(1 - (-1)^{n-k}\right) X^k. \end{aligned}$$

Alors $\deg(Q) = n-1$. Si $n = 1$, $Q = X + 1 - (X-1) = 2$ et le résultat reste vrai. Conclusion, $\boxed{\deg(Q) = n-1}$.

2.4 On a $\deg\left(\left(X^3-5\right) P''\right) = \deg\left(X^3-5\right) + \deg(P'') = 3 + n - 2 = n+1$ car $n \geqslant 2$. De plus $\deg\left(X^2 \circ P\right) = \deg\left(X^2\right) \deg(P) = 2n$ car $P \neq 0$. Puisque $n \geqslant 2$, on a $2n = n + n \geqslant n + 2 > n + 1$. Par conséquent,

$$\deg(Q) = \deg\left(P''\left(X^3-5\right) + X^2 \circ P\right) = \deg\left(X^2 \circ P\right).$$

Conclusion, $\boxed{\deg(Q) = 2n}$.

2.5 Si $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} Q = \sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)^2 X^k + \sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)^2 (-X)^k &= \sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)^2 \left[1 + (-1)^k\right] X^k \\ &= 0 + \underbrace{2(2n+1)^2}_{\neq 0} X^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} (k+1)^2 \left[1 + (-1)^k\right] X^k. \end{aligned}$$

Ainsi, $\deg(Q) = 2n$. Si $n = 0$, $Q = \sum_{k=0}^{1} (k+1)^2 \left[1 + (-1)^k\right] X^k = 0 + 2$. Alors $\deg(Q) = 0 = 2n$. Conclusion, dans tous les cas, $\boxed{\deg(Q) = 2n}$.

2.6 On a directement,

$$\deg(Q) = \deg(P) \deg(P + 3X) = n \deg(P) \qquad \text{car } \deg(P) = n \geqslant 2 > 1 = \deg(X).$$

Conclusion, $\boxed{\deg(Q) = n^2}$.

2.7 On a $P'' = \sum_{k=2}^{n} (k-1)(-1)^{k+1} X^{k-2}$. Donc $X^2 P'' = \sum_{k=2}^{n} (k-1)(-1)^{k+1} X^k$. Ainsi, pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} X^k}{k} - \sum_{k=2}^{n} (k-1)(-1)^{k+1} X^k \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} - (k-1)\right] (-1)^{k+1} X^k + X \\ &= \frac{1+n-n^2}{n} (-1)^{n+1} X^n + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1+k-k^2}{k} (-1)^{k+1} X^k + X. \end{aligned}$$

Si $n = 2$, $Q = \frac{1+n-n^2}{n} (-1)^{n+1} X^n$. Or dans tous les cas, $n^2 \geqslant 2n = n+n > n+1$ Donc $\frac{1+n-n^2}{n} (-1)^{n+1} \neq 0$. Conclusion, $\boxed{\deg(Q) = n}$.

2.8 On a $\deg\left(X^2 P\right) = \deg\left(X^2\right) + \deg(P) = 2 + n$, $\deg\left(X^2 \circ P\right) = \deg\left(X^2\right) \deg(P) = 2n$, $\deg\left(X^2\right) = 2$ et $\deg(P) = n$. Or $n \geqslant 3$ implique que $2n = n + n > n + 2$, $2n > 2$ et $2n > n$. Ainsi,

$$\deg(Q) = \deg\left(X^2 P + X^2 \circ P + X^2 + P\right) = \deg\left(X^2 \circ P\right).$$

Conclusion, $\boxed{\deg(Q) = 2n}$.

2.9 On pose $P=\sum_{k=0}^{11}(-1)^k X^k$. Puisque $\deg(X-1)=1$, on en déduit que $\deg(R)<1$ i.e. $R=r\in\mathbb{K}$. De plus il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P=Q(X-1)+r$. En particulier,

$$P(1)=Q(1)\times 0+r \qquad\Leftrightarrow\qquad r=P(1).$$

Ainsi,

$$r=P(1)=\sum_{k=0}^{11}(-1)^k=\underbrace{1-1}_{=0}+\underbrace{1-1}_{=0}+\cdots+\underbrace{1-1}_{=0}=0.$$

Donc $R=0_{\mathbb{K}[X]}$. Conclusion, $\boxed{\deg(R)=-\infty}$.

2.10 On a $P\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^{2k}}{(2k)!}$, puis

$$\left(P\left(X^2\right)\right)''=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k(2k-1)X^{2k-2}}{(2k)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{X^{2k-2}}{(2k-2)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{X^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{car } n\geqslant 1.$$

Alors,

$$Q=P\left(X^2\right)-\left(P\left(X^2\right)\right)''-X^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{X^{2k}}{(2k)!}-\frac{X^{2n}}{(2n)!}=\frac{X^{2n}}{(2n)!}-\frac{X^{2n}}{(2n)!}=0.$$

Conclusion, $\boxed{\deg(Q)=-\infty}$.

2.11 On a $\deg(P\circ P\circ P)=\deg(P)^3=n^3$ et $\deg\left(P^3\right)=3\deg(P)=3n$. Or $n\geqslant 3$, donc $n^3>1\times 3\times n=3n$. Ainsi,

$$\deg(Q)=\deg\left(P\circ P\circ P-P^3\right)=\deg(P\circ P\circ P).$$

Conclusion, $\boxed{\deg(Q)=n^3}$.

2.12 On remarque que $Q=P\circ P$. Donc $\boxed{\deg(Q)=\deg(P)^2=n^2}$.

Calculer une composition.

2.13 On pose $P=X^2-2X+3$ et $Q=2X+3$. On a

$$P\circ Q=Q^2-2Q+3=(2X+3)^2-2(2X+3)+3=4X^2+12X+9-4X-6+3=4X^2+8X+6.$$

Conclusion, $\boxed{P\circ Q=4X^2+8X+6 \text{ et } \deg(P\circ Q)=2}$.

2.14 On pose $P=\frac{X^2}{3}$. On a directement $P\circ P=\frac{P^2}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{X^4}{9}=\frac{X^4}{27}$. Conclusion,

$$\boxed{P\circ P=\frac{X^4}{27} \qquad \text{et} \qquad \deg(P\circ P)=4.}$$

2.15 On pose $P=X^5$ et $Q=2X^2+1$. On a alors

$$\begin{aligned}P\circ Q=\left(2X^2+1\right)^5&=2^5X^{10}+5\times 2^4X^8+10\times 2^3X^6+10\times 4X^4+5\times 2X^2+1\\&=32X^{10}+80X^8+80X^6+40X^4+10X^2+1.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P\circ Q=32X^{10}+80X^8+80X^6+40X^4+10X^2+1 \qquad \text{et} \qquad \deg(P\circ Q)=10.}$$

2.16 On pose $P=7X+4$ et $Q=X^8-X^6+X^4+1$. On a

$$P\circ Q=7Q+4=7X^8-7X^6+7X^4+7+4.$$

Conclusion,

$$\boxed{P\circ Q=7X^8-7X^6+7X^4+11 \qquad \text{et} \qquad \deg(P\circ Q)=8.}$$

2.17 On pose $P=\frac{X}{2}+1$. On remarque que $P\circ P=\frac{P}{2}+1=\frac{X}{4}+\frac{1}{2}+1$, puis $P\circ P\circ P=\frac{P}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{X}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1$. Par récurrence, on montre que pour tout $n\geqslant 1$,

$$R=\frac{X}{2^n}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}.$$

On reconnait une somme géométrique de raison $1/2$:

$$R=\frac{X}{2^n}+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{X}{2^n}+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{R=\frac{X}{2^n}+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\qquad\text{et}\qquad\deg(R)=1.}$$

3. **Résoudre une équation polynomiale.**

3.1 *Méthode 1.* Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Notons $n=\deg(P)$. Si P vérifie $P\left(X^2\right)=P^2$ alors,

$$\deg\left(X^2P\right)=\deg\left(P^2\right)\qquad\Leftrightarrow\qquad n+2=2n\qquad\Leftrightarrow\qquad n=2\ \text{ OU }\ n=-\infty.$$

Posons donc $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{R}^3$, tel que $P=a_0+a_1X+a_2X^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& X^2P=P^2\\
\Leftrightarrow\quad & X^2\left(a_0+a_1X+a_2X^2\right)=\left(a_0+a_1X+a_2X^2\right)^2\\
\Leftrightarrow\quad & a_0X^2+a_1X^3+a_2X^4=a_0^2+a_1^2X^2+a_2^2X^4+2a_0a_1X+2a_0a_2X^2+2a_1a_2X^3\\
\Leftrightarrow\quad & a_0X^2+a_1X^3+a_2X^4=a_0^2+2a_0a_1X+\left(a_1^2+2a_0a_2\right)X^2+2a_1a_2X^3+a_2^2X^4\\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases}0=a_0^2\\ 0=2a_0a_1\\ a_0=a_1^2+2a_0a_2\\ a_1=2a_1a_2\\ a_2=a_2^2\end{cases}\qquad\text{par unicité des coefficients d'un polynôme}\\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases}a_0=0\\ 0=0\\ a_1^2=0\\ a_1=2a_1a_2\\ a_2=a_2^2\end{cases}\\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases}a_0=0\\ a_1=0\\ a_2=a_2^2\end{cases}\\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases}a_0=a_1=0\\ a_2=0\ \text{ OU }\ a_2=1\end{cases}\\
\Leftrightarrow\quad & P=0_{\mathbb{R}[X]}\ \text{ OU }\ P=X^2.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{0_{\mathbb{R}[X]};X^2\right\}.}$$

Méthode 2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $X^2P=P^2$. Alors, $0=P^2(0)$ et donc $P(0)=0$. Donc 0 est une racine de P. On note que $P=0_{\mathbb{R}[X]}$ est une solution de $X^2P=P^2$. Supposons maintenant $P\neq 0_{\mathbb{R}(X]}$. Notons m la multiplicité de 0 dans P : $P=X^mQ$ avec $Q(0)\neq 0$. Dès lors,

$$X^2X^mQ=\left(X^mQ\right)^2=X^{2m}Q^2\qquad\Leftrightarrow\qquad X^2=X^mQ\qquad\qquad\text{car } Q\neq 0_{\mathbb{R}[X]}\text{ car } Q(0)\neq 0.$$

Puisque $Q(0)\neq 0$, $m\geqslant 2$ et donc $1=X^{m-2}Q$ ce qui n'est possible que si $m=2$ et $Q=1$. D'où, $P=X^2$. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{0_{\mathbb{R}[X]};X^2\right\}.}$$

3.2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg(P)$. Si P est solution de $P'P'' = 6P$, alors,

$$\deg(P'P'') = \deg(6P) \qquad \Leftrightarrow \qquad \deg(P') + \deg(P'') = \deg(P).$$

Supposons $n \geqslant 2$. Alors, $\deg(P') = n-1$ et $\deg(P'') = n-2$. Dans ce cas,

$$n - 1 + n - 2 = n \qquad \Leftrightarrow \qquad n = 3.$$

On a donc $n < 1$ ou $n = 3$. Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ et $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& P'P'' = 6P \\
\Leftrightarrow\quad & \left(a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2\right)(2a_2 + 6a_3X) = 6a_0 + 6a_1X + 6a_2X^2 + 6a_3X^3 \\
\Leftrightarrow\quad & 2a_1a_2 + \left(6a_1a_3 + 4a_2^2\right)X + (12a_2a_3 + 6a_2a_3)X^2 + 18a_3^2X^3 = 6a_0 + 6a_1X + 6a_2X^2 + 6a_3X^3 \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} 2a_1a_2 = 6a_0 \\ 6a_1a_3 + 4a_2^2 = 6a_1 \\ 18a_2a_3 = 6a_2 \\ 18a_3^2 = 6a_3 \end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} a_1a_2 = 3a_0 \\ 3a_1a_3 + 2a_2^2 = 3a_1 \\ 3a_2a_3 = a_2 \\ 3a_3 = 1 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a_1a_2 = 3a_0 \\ 3a_1a_3 + 2a_2^2 = 3a_1 \\ 3a_2a_3 = a_2 \\ a_3 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} a_1a_2 = 3a_0 \\ a_1 + 2a_2^2 = 3a_1 \\ a_2 = a_2 \\ a_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} a_1a_2 = 3a_0 \\ a_2^2 = a_1 \\ a_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} a_2^2a_2 = 3a_0 \\ a_1 = a_2^2 \\ a_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} a_2^3 = 3a_0 \\ a_1 = a_2^2 \\ a_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} a_0 = \frac{a_2^3}{3} \\ a_1 = a_2^2 \\ a_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{1}{3}X^3 + a_2X^2 + a_2^2X + \frac{a_2^3}{3} \,\middle|\, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}.}$$

Vérification : si $P = 0$, alors $P'P'' = 6P$ OK ! Si $P = \frac{1}{3}X^3 + a_2X^2 + a_2^2X + \frac{a_2^3}{3}$, alors $P' = X^2 + 2a_2X + a_2^2$ et $P'' = 2X + 2a_2$. Donc

$$P'P'' = 2X^3 + 2a_2X^2 + 4a_2X^2 + 4a_2^2X + 2a_2^2X + 2a_2^3 = 2X^3 + 6a_2X^2 + 6a_2^2X + 2a_2^3 = 6P \ \textit{OK !}$$

3.3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg(P)$. Si $\left(2X^2+X+1\right)P'' = (X+1)P' + 2P$, alors

$$\deg\left(\left(2X^2+X+1\right)P''\right) = \deg\left((X+1)P'+2P\right).$$

Supposons $n \geqslant 2$. Alors, $\deg\left(\left(2X^2+X+1\right)P''\right) = 2+n-2 = n$. Or $\deg\left((X+1)P'\right) = 1+n-1 = n$ et $\deg(2P) = n$. Donc $\deg\left((X+1)P'+2P\right) \neq n$. Donc cela n'apporte aucune information.

On remarque que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ est une solution. Supposons désormais $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $n \in \mathbb{N}$. Notons a_n le coefficient dominant de P et donc $a_n \neq 0$. Dès lors, le coefficient dominant de $\left(2X^2+X+1\right)P''$ est $2n(n-1)a_n$ celui de $(X+1)P'$ est na_n et celui de $2P$ est $2a_n$. Par unicité des coefficients d'un polynômes, on a

$$\begin{aligned} 2n(n-1)a_n = na_n + 2a_n \quad &\Leftrightarrow \quad 2n^2 - 2n = n+2 \qquad \text{car } a_n \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2n^2 - 3n - 2 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 9+16 = 25 = 5^2$. Donc $n = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ ou $n = \frac{3+5}{4} = 2$. Or $n \in \mathbb{N}$. Nécessairement $n = 2$.

Posons $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ et $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \left(2X^2+X+1\right)P'' = (X+1)P' + 2P \\ \Leftrightarrow\quad & \left(2X^2+X+1\right)(2a_2) = (X+1)(a_1+2a_2X) + 2a_0 + 2a_1X + 2a_2X^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2a_2 + 2a_2X + 4a_2X^2 = 2a_0 + a_1 + (2a_1 + a_1 + 2a_2)X + (2a_2+2a_2)X^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2a_2 + 2a_2X + 4a_2X^2 = 2a_0 + a_1 + (3a_1 + 2a_2)X + 4a_2X^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{cases} 2a_2 = 2a_0 + a_1 \\ 2a_2 = 3a_1 + 2a_2 \\ 4a_2 = 4a_2 \end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{cases} 2a_2 = 2a_0 + a_1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{cases} a_2 = a_0 \\ a_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ a_2X^2 + a_2 \,\middle|\, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.}$$

On observe bien que $0_{\mathbb{R}[X]}$ en fait partie. Vérification : si $P = a_2X^2 + a_2$, alors,

$$\begin{aligned} \left(2X^2+X+1\right)P'' &= \left(2X^2+X+1\right)(2a_2) = 4a_2X^2 + 2a_2X + 2a_2 \\ (X+1)P' + 2P &= (X+1)(2a_2X) + 2a_2X^2 + 2a_2 = 4a_2X^2 + 2a_2X + 2a_2 \quad \textit{OK !} \end{aligned}$$

3.4 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg(P)$. Si $P\left(X^3\right) = \left(X^2+X+1\right)P$, alors

$$\deg\left(P\left(X^3\right)\right) = \deg\left(\left(X^2+X+1\right)P\right) \quad \Leftrightarrow \quad 3n = n+2 \quad \Leftrightarrow \quad n = 1 \text{ OU } n = -\infty.$$

Soit $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ et $P = a_0 + a_1X \in \mathbb{R}_1[X]$. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P\left(X^3\right) = \left(X^2+X+1\right)P \quad &\Leftrightarrow \quad a_0 + a_1X^3 = \left(X^2+X+1\right)(a_0 + a_1X) \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 + a_1X^3 = a_0 + (a_0+a_1)X + (a_0+a_1)X^2 + a_1X^3 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = a_0 \\ 0 = a_0 + a_1 \\ 0 = a_0 + a_1 \\ a_1 = a_1 \end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = -a_1 \\ &\Leftrightarrow \quad P = a_1X - a_1. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{\, a_1 X - a_1 \mid a_1 \in \mathbb{R} \,\}\,.}$$

Vérification, si $a_1 = 1$, $P = X - 1$. *Alors,*

$$\left(X^2 + X + 1\right)(X-1) = X^3 - X^2 + X^2 - X + X - 1 = X^3 - 1 \textit{ OK !}$$

3.5 Ni le degré ni le coefficient dominant ne donne quelque chose. Passons plutôt par les racines. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = P(X+1)$.
Procédons par l'absurde et supposons P non constant, alors par le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet au moins une racine complexe. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors, $P(a) = 0$ et donc par l'équation $P = P(X+1)$, on a

$$0 = P(a) = P(a+1).$$

Donc $a+1$ est aussi une racine de P. En évaluant en « $X = a+1$ », on a $0 = P(a+1) = P(a+2)$. Donc $a+2$ est aussi une racine. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a+n$ est une racine de P. Les $a+n$ étant tous distincts deux à deux, on en déduit que P admet une infinité de racines donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ est constant ce qui est contradictoire.
Donc P est nécessairement un polynôme constant. Réciproquement, si P est constant, alors $P(X+1) = P$.
Conclusion, l'ensemble des polynômes solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}_0[X].}$$

3.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $p = \deg(P)$. Si P est nul ou constant, alors P n'est pas solution. Donc si $P' + P = \frac{X^n}{n!}$, alors $p \geqslant 1$ et donc $\deg(P') = p - 1 < \deg(P)$. Donc $\deg(P' + P) = p$. Or $\deg\left(\frac{X^n}{n!}\right) = n$.
D'où $p = n$. Procédons ici à la méthode brute. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors,

$$P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_{k+1} X^k.$$

On obtient donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P' + P = \frac{X^n}{n!} \quad & \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_{k+1} X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \frac{X^n}{n!} \\
& \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)\, a_{k+1} + a_k\right] X^k + a_n X^n = \frac{X^n}{n!} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0; n-1]\!], (k+1)\, a_{k+1} + a_k = 0 \text{ et } a_n = \frac{1}{n!} \\
& \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0; n-1]\!], a_{k+1} = -\frac{a_k}{k+1} \text{ et } a_n = \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in [\![1; n]\!]$,

$$a_k = -\frac{a_{k-1}}{k} = \frac{-1}{k}\frac{-1}{k-1} a_{k-2} = \frac{-1}{k}\frac{-1}{k-1}\frac{-1}{k-2} a_{k-3} = \frac{-1}{k}\frac{-1}{k-1}\frac{-1}{k-2} \times \cdots \times \frac{-1}{1} a_0.$$

D'où,

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad a_k = \frac{(-1)^k}{k!} a_0.$$

En particulier, $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} a_0$ i.e. $a_0 = \frac{n!}{(-1)^n} a_n = (-1)^n\, n! a_n$. Or $a_n = \frac{1}{n!}$ donc $a_0 = (-1)^n$. Finalement,

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad a_k = \frac{(-1)^{n+k}}{k!}.$$

Encore vrai si $k = 0$. Conclusion, l'unique polynôme solution est donné par

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}}{k!} X^k.}$$

4. **Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$.**

4.1 Soit $P = X^3 + (7-2i)\,X^2 - (1+14i)\,X - 7$. On remarque que

$$P\,(i) = -i - (7-2i) - (1+14i)\,i - 7 = -i - 7 + 2i - i + 14 - 7 = 0.$$

Donc i est une racine de P et donc $X - i$ divise P et même :

$$P = (X-i)\left(X^2 + (7-i)\,X - 7i\right).$$

On note alors que i est racine de $Q = X^2 + (7-i)\,X - 7i$. En effet,

$$Q\,(i) = -1 + 7i + 1 - 7i = 0.$$

Donc

$$P = (X-i)\,(X-i)\,(X+7)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{P = (X-i)^2\,(X+7)\,.}$$

4.2 Soit $P = X^4 + 16$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = 0_{\mathbb{C}} \quad \Leftrightarrow \quad z^4 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 = -16$ i.e. z est une racine quatrième de $-16 = 2^4\,\mathrm{e}^{i\pi}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0\,;\,3]\!], \quad z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2k\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{OU} \quad z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{OU} \quad z = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{OU} \quad z = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad \text{OU} \quad z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

On obtient donc 4 racines distinctes de P. Donc on obtient (car la coefficient dominant de P vaut 1)

$$\boxed{P = \left(X - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right).}$$

4.3 Soit $P = X^3 + X^2 + 5X - 7$. On note que 1 est une racine de P. En effet, $P(1) = 1 + 1 + 5 - 7 = 0$. Donc

$$P = (X-1)\left(X^2 + 2X + 7\right).$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 + 2X + 7$. On a $\Delta = 4 - 28 = -24$. Les racines complexes de $X^2 + 2X + 7$ sont donc

$$r_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{6}i}{2} = -1 + i\sqrt{6} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{6}i}{2} = -1 - i\sqrt{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{P = (X-1)\left(X + 1 - i\sqrt{6}\right)\left(X + 1 + i\sqrt{6}\right).}$$

4.4 Soit $P = X^4 - 11X^3 + 27X^2 + 11X - 28$. On remarque que 1 est une racine réelle de P. En effet $P\,(1) = 1 - 11 + 27 + 11 - 28 = 0$. Donc

$$P = (X-1)\left(X^3 - 10X^2 + 17X + 28\right).$$

On note alors que -1 est une racine de $Q = X^3 - 10X^2 + 17X + 28$, en effet $Q\,(-1) = -1 - 10 - 17 + 28 = 0$. Donc $(X+1)$ divise Q et donc P :

$$P = (X-1)\,(X+1)\left(X^2 - 11X + 28\right)$$

On note alors que $7 + 4 = 11$ et $7 \times 4 = 28$. Donc par la relation racine-coefficient sur un trinôme, on obtient que 4 et 7 sont les deux racines de $X^2 - 11X + 28$. Ainsi,

$$\boxed{P = (X-1)\,(X+1)\,(X-4)\,(X-7)\,.}$$

Notamment le polynôme P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

4.5 Soit $P = X^6 - 3X^5 + 5X^4$. On remarque bien entendu que X^4 divise P et donc

$$P = X^4 \left(X^2 - 3X + 5\right).$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 - 3X + 5$. On a $\Delta = 9 - 20 < 0$. Donc $X^2 - 3X + 5$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Conclusion, la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P est donné par

$$\boxed{P = X^4 \left(X^2 - 3X + 5\right).}$$

4.6 Soit $P = X^4 + 4X^3 - 3X^2 + 4X - 4$. Comme indiqué, on regarde $P(i)$ et l'on trouve que

$$P(i) = 1 - 4i + 3 + 4i - 4 = 0.$$

Donc i est une racine de P. Or P est à coefficients réels, donc $\bar{i} = -i$ est aussi une racine de P. Ces deux racines étant distinctes, on en déduit que $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$ divise P. Par suite

$$P = \left(X^2 + 1\right)\left(X^2 + 4X - 4\right).$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 + 4X - 4$. On a $\Delta = 16 + 16 = 32$. Donc les racines sont $\frac{-4+4\sqrt{2}}{2} = -2 + 2\sqrt{2}$ et $\frac{-4-4\sqrt{2}}{2} = -2 - 2\sqrt{2}$. Conclusion,

$$\boxed{P = \left(X^2 + 1\right)\left(X + 2 - 2\sqrt{2}\right)\left(X + 2 + 2\sqrt{2}\right).}$$

5. **Déterminer la limite d'une suite complexe.**

5.1 On calcule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| = \left|\frac{1+i}{3}\right|^n = \left(\frac{\sqrt{1+1}}{3}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n.$$

Or $0 < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$$

Conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

5.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{12n + 5n^2 - 6n^3}{1 + 3n^2 - 5n^3} + i\frac{2n^2 - 3n^3}{1 + 3n^2 - 5n^3}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{12n + 5n^2 - 6n^3}{1 + 3n^2 - 5n^3} = \frac{6}{5}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 - 3n^3}{1 + 3n^2 - 5n^3} = \frac{3}{5}$$

Conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{6+3i}{5}.}$$

5.3 On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|u_n| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

5.4 On note que

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im}(u_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im}(u_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -1 = -1$$

Donc ces deux suites extraites ne convergent pas vers la même limite. Donc la suite $(\operatorname{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(\operatorname{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Conclusion, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$.

5.5 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{-1+i}{7}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = q^n u_0 = \left(\frac{-1+i}{7}\right)^n (-5+3i).$$

Donc

$$|u_n| = |q|^n |u_0| = \left(\frac{|-1+i|}{7}\right)^n |u_0| = \left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^n |u_0|.$$

Or $0 < \frac{\sqrt{2}}{7} < 1$. Donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puisque $|u_0|$ est un complexe fixé (indépendant de n), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

6. **BONUS : Calculer une évaluation.**

6.1 On a $P(A) = (A + I_3)^2$. Or

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion, $\boxed{P(A) = 0_3}$.

6.2 On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y compris $n = 0$) $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} 1 \end{pmatrix}.$$

On est en présence de deux sommes géométriques de raison 3 et -2 ($\neq 1$) donc

$$P(A) = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1}-1}{3-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-2)^{n+1}-1}{-2-1} & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{P(A) = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}.}$$

6.3 On observe que $A = 2I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 2 : $N^2 = 0_3$. De plus N et I_3 commutent. Donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} A^k = (2I_3 + N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i 2^{k-i} I_3^{k-i} &= 2^k I_3 + k2^{k-1} N I_3 + 0_3 \qquad \text{car } \forall i \geqslant 2, N^i = 0_3 \\ &= 2^k I_3 + k2^{k-1} N. \end{aligned}$$

On note que cette formule reste vraie si $k = 0$. Alors,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} \left[A^k - k2^{k-1}(A - 2I_3)\right] = \sum_{k=0}^{n} \left[2^k I_3 + k2^{k-1} N - k2^{k-1} N\right] = \sum_{k=0}^{n} 2^k I_3 = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} I_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{P(A) = \left(2^{n+1} - 1\right) I_3.}$$

6.4 On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors on remarque que $f^2 = f \circ f : x \mapsto f(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Donc $f^2 = \mathrm{Id}$. Puis $f^3 = f \circ \mathrm{Id} = f$. Par récurrence, on obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{2n} = \mathrm{Id}$ et $f^{2n+1} = f$. Ainsi,

$$P(f) = \mathrm{Id} + f + f^2 + f^3 + f^4 + f^5 + f^6 = \mathrm{Id} + f + \mathrm{Id} + f + \mathrm{Id} + f + \mathrm{Id} = 4\mathrm{Id} + 3f.$$

Conclusion,

$$\boxed{P(f) \ : x \mapsto 4x + \frac{3}{x}.}$$

6.5 On pose $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + 2$. On note alors pour tout $x \in R$, $f(x) \in \mathbb{N}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^2(x) = f(f(x)) = \lfloor f(x) \rfloor + 2 = f(x) + 2 = \lfloor x \rfloor + 4.$$

Alors de même $f^2(x) \in \mathbb{N}$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^3(x) = f^2(f(x)) = \lfloor f(x) \rfloor + 4 = f(x) + 4 = \lfloor x \rfloor + 6$. Puis par récurrence, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^k(x) = \lfloor x \rfloor + 2k \in \mathbb{N}$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} k f^k(x) = \sum_{k=1}^{n} k f^k(x) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\lfloor x \rfloor + 2k\right) = \frac{n(n+1)}{2} \lfloor x \rfloor + 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{P(f) \ : x \mapsto \frac{n(n+1)}{2} \lfloor x \rfloor + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.}$$

6.6 On pose $f : x \mapsto x^2 + 1$. Alors $f^2 : x \mapsto f^2(x) = f \circ f(x) = f(x)^2 + 1 = \left(x^2 + 1\right)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(f)(x) = f^2(x) - 2f(x) + \mathrm{Id}(x) = x^4 + 2x^2 + 2 - 2x^2 - 2 + x = x^4 + x.$$

Conclusion,

$$\boxed{P(f) \ : x \mapsto x^4 + x.}$$