Interrogation 19 d'entrainement
Espaces vectoriels

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
   1.2 Définir la somme de deux espaces vectoriels.
   1.3 Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
   1.4 Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
   1.5 Enoncer les deux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme.
   1.6 Définir un espace de Hilbert.

   Révisions

   1.7 Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
   1.8 Enoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
   1.9 Donner une condition nécessaire à l'existence d'un développement limité à l'ordre n. Préciser le cas $n = 0$ et $n = 1$.
   1.10 Enoncer l'unicité du développement limité.
   1.11 Enoncer la propriété permettant de primitiver un développement limité.
   1.12 Enoncer la formule de Taylor-Young.

2. **Reconnaître un espace vectoriel.**
   Démontrer si E est un espace vectoriel ou non.
   2.1 $E = [-1\,;1]$.
   2.2 $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^3 = 0 \right\}$.
   2.3 $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 0 \right\}$.
   2.4 $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{majorée par } 1 \right\}$.
   2.5 $E = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; X^2 + 1 \text{ divise } P \right\}$.
   2.6 $E = \left\{ P \in \mathbb{C}[X] \;\middle|\; X^3 P^{(3)} = P\left(X^2+1\right) \right\}$.
   2.7 $E = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - 1 \right\}$.
   2.8 $E = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM \}$, où $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   2.9 $E = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{N}^*,\ f \text{ est } k\text{-périodique} \}$.
   2.10 $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + nu_n \right\}$.
   2.11 $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n) \right\}$.
   2.12 $E = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \text{lipschitzienne} \}$.
   2.13 $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{de signe constant} \right\}$.
   2.14 $E = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0 \}$.
   2.15 $E = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ 2\text{-lipschitzienne} \}$.
   2.16 $E = \{ P \in \mathbb{C}[X] \mid P(1) = P'(1) = P''(1) \}$.

3. **Déterminer une intersection ou une somme d'espaces vectoriels.**
   3.1 Soient $F = \{\, P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P'(1) = 0 \,\}$ et $G = \{\, P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P''(1) = 0 \,\}$. Calculer $F \cap G$.
   3.2 Soient $F = \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $G = \{\, M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0 \,\}$. Calculer $F \cap G$.
   3.3 Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ et $G = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+t=0 \right\}$. Calculer $F \cap G$.
   3.4 Soient $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; f'' = f \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \cos)$. Calculer $F + G$.
   3.5 Soient $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \right\}$ et
   $G = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \right\}$. Calculer $F + G$.
   3.6 Soient $F = \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $G = \{\, M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0 \,\}$. Calculer $F + G$.
4. **Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires.**
   4.1 Montrer que $F = \{\, f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R} \,\}$ et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   4.2 Montrer que $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   4.4 Montrer que $F = \{\, P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0 \,\}$ et $G = \{\, P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0 \,\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
   4.5 Montrer que $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; f'' + 3f' + 7f = 0 \right\}$ et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = f'(0) = 0 \right\}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. **Déterminer la multiplicité d'une racine.**
   5.1 Déterminer la multiplicité de 1 pour le polynôme $5X^5 - 13X^4 + 12X^3 - 8X^2 + 7X - 3$.
   5.2 Déterminer la multiplicité de -1 pour le polynôme $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.
   5.3 Déterminer la multiplicité de 2 pour le polynôme $(X-2)^2\left(X^2 - 13X + 22\right)$.
   5.4 Déterminer la multiplicité de j pour le polynôme $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$.
   5.5 Montrer que $X^2 + 2X + 1$ divise $X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26$.
   5.6 Montrer que $X^2 - 4X + 4$ divise $X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 8X + 4$.