Correction de l'interrogation 19 d'entrainement
Espaces vectoriels

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel si et seulement si (par définition) :

- $F \subseteq E$
- F est un espace vectoriel.

si et seulement si (par caractérisation) :

- $F \subseteq E$
- $0_E \in F$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F.$

1.2 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$F + G = \{ z \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G,\ z = x + y \}.$$

1.3 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si (par définition)

$$\forall (x, x') \in F^2,\ \forall (y, y') \in G^2, \qquad (x + y = x' + y') \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

si et seulement si (par caractérisation) :

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

1.4 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si (par définition)

$$\forall z \in E,\ \exists! (x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

si et seulement si (par caractérisation) :

1. $F \cap G = \{0_E\}$.
2. $F + G = E$.

1.5 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On note $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_n$ les coefficients de P et $x_1, \ldots, x_n$ les racines de P (éventuellement confondues). Alors

1. $x_1 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
2. $x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

1.6 Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet. Comment je ne l'ai pas défini dans le cours ? C'est quoi un espace préhilbertien ? C'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. C'est quoi un produit scalaire ? C'est une forme bilinéaire définie positive et symétrique. C'est quoi une forme bili... Ok si je vous dit que $\mathbb{R}^3$ est un espace de Hilbert, ça vous va ? D'ailleurs, vous ne saviez pas que $\mathbb{R}^3$ était à Hilbert ? Vous devriez alors en sortir vite fait avant qu'il ne se fâche...

2. **Reconnaître un espace vectoriel.**

2.1 Posons $x = 1$. Alors $x \in E$ et pourtant $2x = 2 \notin E$. Donc E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion,

$$\boxed{E = [-1; 1] \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

2.2 On pose $u = (1, -1)$. On observe que $1^2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$. Donc $u \in E$. Cependant $v = -u = (-1, 1)$ vérifie $(-1)^2 + 1^3 = 1 + 1 = 2 \neq 0$. Donc $-u \notin E$ et E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion,

$$\boxed{E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^3 = 0 \right\} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

2.3 La somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si les deux réels sont nuls. Donc $E=\{(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}\}$ qui est bien un espace vectoriel. Conclusion,

$$\boxed{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2=0\right\} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

2.4 Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$. Alors la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien majorée par 1 et donc $u\in E$. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=2u_n$, alors la suite $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=2u$ n'est pas majorée par 1. Donc $2u\notin E$ et E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion,

$$\boxed{E=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{majorée par } 1\right\} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

2.5 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- $E\subseteq\mathbb{R}[X]$ par définition.
- $0_{\mathbb{R}[X]}=\left(X^2+1\right)0_{\mathbb{R}[X]}$ donc X^2+1 divise $0_{\mathbb{R}[X]}$ et $0_{\mathbb{R}[X]}\in E$.
- Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(P,Q)\in E^2$. Posons $R=\lambda P+\mu Q$. Puisque $P\in E$, X^2+1 divise P : il existe $P_1\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=\left(X^2+1\right)P_1$. De même $Q\in E$ donc il existe $Q_1\in\mathbb{R}[X]$ tel que $Q=\left(X^2+1\right)Q_1$. Ainsi,

$$R=\lambda P+\mu Q=\lambda\left(X^2+1\right)P_1+\mu\left(X^2+1\right)Q_1=(\lambda P_1+\mu Q_1)\left(X^2+1\right)$$

  Donc X^2+1 divise R et donc $\lambda P+\mu Q=R\in E$, E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et donc

$$\boxed{E=\left\{P\in\mathbb{R}[X] \;\middle|\; X^2+1 \text{ divise } P\right\} \text{ est un vectoriel.}}$$

2.6 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

- $E\subseteq\mathbb{C}[X]$ par définition.
- Posons $P=0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $X^3P^{(3)}=X^30_{\mathbb{R}[X]}=0_{\mathbb{R}[X]}=P\left(X^2+1\right)$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]}\in E$.
- Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ et $(P,Q)\in E^2$. Posons $R=\lambda P+\mu Q$. Puisque $P\in E$, $X^3P^{(3)}=P\left(X^2+1\right)$. De même $Q\in E$ donc $X^3Q^{(3)}=Q\left(X^2+1\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
X^3R^{(3)}&=X^3\left(\lambda P^{(3)}+\mu Q^{(3)}\right) && \text{par linéarité de la dérivation}\\
&=\lambda X^3P^{(3)}+\mu X^3Q^{(3)}\\
&=\lambda P\left(X^2+1\right)+\mu Q\left(X^2+1\right) && \text{car } P\in E \text{ et } Q\in E\\
&=(\lambda P+\mu Q)\circ\left(X^2+1\right)\\
&=R\left(X^2+1\right).
\end{aligned}$$

  Donc $R=\lambda P+\mu Q\in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ et donc

$$\boxed{E=\left\{P\in\mathbb{C}[X] \;\middle|\; X^3P^{(3)}=P\left(X^2+1\right)\right\} \text{ est un vectoriel.}}$$

2.7 La fonction nulle n'appartient pas à E. Posons $f=0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0_{\mathbb{R}}\neq-1=f(1)-1$. Conclusion,

$$\boxed{E=\left\{f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=f(1)-1\right\} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

2.8 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- $E\subseteq\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Si $M=0_n$, alors $MN=0_nN=0_n=N0_n=NM$. Donc $0_n\in E$.

- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M_1, M_2) \in E^2$. Posons $M = \lambda M_1 + \mu M_2$. Alors,

$$\begin{aligned} MN = (\lambda M_1 + \mu M_2) N = \lambda M_1 N + \mu M_2 N &= \lambda N M_1 + \mu N M_2 && \text{car } M_1 \in E \text{ et } M_2 \in E \\ &= N (\lambda M_1 + \mu M_2) \\ &= NM. \end{aligned}$$

  Donc $M = \lambda M_1 + \mu M_2 \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{E = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM \} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

2.9 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- $E \subseteq \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition.
- La fonction nulle $f = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est 1-périodique, 2-périodique et même k-périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donc $0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Puisque $f \in E$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que f est k_1-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x + k_1) = f(x).$$

  De même $g \in E$, donc il existe $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que g est k_2-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x + k_2) = f(x).$$

  Puisque g est k_2 périodique, alors g est $2k_2$-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x + 2k_2) = g((x + k_2) + k_2) = g(x + k_2) = g(x).$$

  Puis de même g est $3k_2$-périodique et par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, g est pk_2-périodique. Notamment g est k_1k_2-périodique.
  De même, f est pk_1-périodique pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc f est k_1k_2-périodique.
  Posons maintenant $h = \lambda f + \mu g$. Montrons que h est k_1k_2-périodique. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x + k_1k_2) &= \lambda f(x + k_1k_2) + \mu g(x + k_1k_2) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) && \text{car } f \text{ et } g \text{ sont } k_1k_2\text{-périodiques.} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

  Donc h est k-périodique avec $k = k_1k_2 \in \mathbb{N}^*$. Donc $h = \lambda f + \mu g \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{E = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{N}^*,\ f \text{ est } k\text{-périodique } \} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

2.10 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 0$. Alors $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 0_{\mathbb{R}} = 3 \times 0 + n \times 0 = 3u_{n+1} + nu_n$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in E^2$. Notons $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+2} = \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} &= \lambda (3u_{n+1} + nu_n) + \mu (3v_{n+1} + nv_n) && \text{car } u \in E \text{ et } v \in E \\ &= 3 (\lambda u_{n+1} + \mu vn + 1) + n (\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= 3w_{n+1} + nw_n. \end{aligned}$$

  Donc $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda u + \mu v \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc

$$\boxed{E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + nu_n \right\} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

2.11 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On a $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$. Donc $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in E^2$. Posons $w = \lambda u + \mu v$ et notons $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque $u \in E$ et $v \in E$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \lambda u_n + \mu v_n \underset{n\to+\infty}{=} \lambda o(n) + \mu o(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n).$$

  Donc $w = \lambda u + \mu v \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc

$$\boxed{E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n) \right\} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

2.12 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- $E \subseteq \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition.
- La fonction nulle $f = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est bien k-lipschitzienne pour tout $k \in \mathbb{R}_+$. En effet,

$$\forall k \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 \leqslant k\,|x - y|.$$

  Donc $0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Montrons que $h \in E$. Puisque $f \in E$, alors f est lipschitzienne i.e. il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant a\,|x - y|.$$

  De même $g \in E$ est lipschitzienne, il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |g(x) - g(y)| \leqslant a\,|x - y|.$$

  Alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |h(x) - h(y)| &= |\lambda f(x) + \mu g(x) - (\lambda f(y) + \mu g(y))| \\ &= |\lambda (f(x) - f(y)) + \mu (g(x) - g(y))| \\ &\leqslant |\lambda (f(x) - f(y))| + |\mu (g(x) - g(y))| && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &= |\lambda|\,|f(x) - f(y)| + |\mu|\,|g(x) - g(y)| \\ &\leqslant |\lambda|\,a\,|x - y| + |\mu|\,b\,|x - y| && \begin{array}{c} f \text{ est } a\text{-lipschitzienne} \\ g \text{ est } b\text{-lipschitzienne} \end{array} \\ &= (|\lambda|\,a + |\mu|\,b)\,|x - y|. \end{aligned}$$

  Posons $c = |\lambda|\,a + |\mu|\,b \in \mathbb{R}_+$, alors h est c-lipschitzienne,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |h(x) - h(y)| \leqslant c\,|x - y|.$$

  Donc $h = \lambda f + \mu g \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{E = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \text{lipschitzienne}\} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

2.13 Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Posons également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2$. On observe que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de signe constant. Donc $u \in E$ et $v \in E$. Posons $w = u + v$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors la suite $w \notin E$. Donc E n'est pas stable par addition. Conclusion,

$$\boxed{E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{de signe constant} \right\} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

2.14 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- On a $E \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Si $M = 0_n$, alors $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(0_n) = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $0_n \in E$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in E^2$. Posons $A = \lambda M + \mu N$. Par linéarité de la trace,

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\lambda M + \mu N) = \lambda \operatorname{tr}(M) + \mu \operatorname{tr}(N) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \qquad \text{car } M \in E \text{ et } N \in E.$$

  Donc $A = \lambda M + \mu N \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{E = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0 \} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

2.15 Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{array}$. Alors f est 2-lipschitzienne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(x) - f(y)| = |2x - 2y| = 2\,|x-y|\,.$$

Donc $f \in E$. Posons maintenant $g = 2f$. Alors on a,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y, \qquad |g(x) - g(y)| = |4x - 4y| = 4\,|x-y| > 2\,|x-y| \qquad \text{car } |x-y| > 0.$$

Donc g n'est pas 2-lipschitzienne. Ainsi $2f \notin E$ et E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion,

$$\boxed{E = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \text{2-lipschitzienne} \} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

2.16 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
- On a $E \subseteq \mathbb{C}[X]$ par définition.
- Si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Alors $P'' = P' = P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Donc $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0_{\mathbb{C}}$. Donc $P = 0_{\mathbb{C}[X]} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Alors, par linéarité de la dérivation, $R' = \lambda P' + \mu Q'$ et $R'' = \lambda P'' + \mu Q''$. Donc

$$\begin{aligned} R''(1) = \lambda P''(1) + \mu Q''(1) &= \lambda P'(1) + \mu Q'(1) = R'(1) && \text{car } P \in E \text{ et } Q \in E \\ &= \lambda P(1) + \mu Q(1) = R(1) && \text{car } P \in E \text{ et } Q \in E. \end{aligned}$$

  Ainsi, $R''(1) = R'(1) = R(1)$. Donc $R = \lambda P + \mu Q \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ et donc

$$\boxed{E = \{ P \in \mathbb{C}[X] \mid P(1) = P'(1) = P''(1) \} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

3. **Déterminer une intersection ou une somme d'espaces vectoriels.**

3.1 Soient $F = \{ P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P'(1) = 0 \}$ et $G = \{ P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P''(1) = 0 \}$. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$P \in F \cap G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P \in F \\ P \in G \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad P'(1) = P''(1) = 0.$$

Posons $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^4$ tel que $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Alors $P' = 3a_3X^2 + 2a_2X + a_1$ et $P'' = 6a_3X + 2a_2$. Donc

$$\begin{aligned} P \in F \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ 6a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a_3 - 6a_3 + a_1 = 0 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 3a_3 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad P = a_3\left(X^3 - 3X^2 + 3X\right) + a_0 \end{aligned}$$

D'où,

$$F \cap G = \left\{ a_3\left(X^3 - 3X^2 + 3X\right) + a_0 \in \mathbb{K}_3[X] \,\middle|\, (a_3, a_0) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{F \cap G = \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}\left(X^3 - 3X^2 + 3X, 1\right).}$$

3.2 Soients $F=\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $G=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\mid \operatorname{tr}(M)=0\}$. Soit $M=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
M\in F\cap G \quad&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}M\in\mathscr{S}_3(\mathbb{R})\\ \operatorname{tr}(M)=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a_{12}=a_{21},\ a_{13}=a_{31},\ a_{23}=a_{32}\\ a_{11}+a_{22}+a_{33}=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a_{12}=a_{21},\ a_{13}=a_{31},\ a_{23}=a_{32}\\ a_{33}=-a_{11}-a_{22}.\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad M=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&-a_{11}-a_{22}\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow\quad M=a_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\
&\qquad\qquad +a_{22}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+a_{23}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F\cap G=\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right).}$$

3.3 Soients $F=\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ et $G=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ x+y+z+t=0\right\}$. Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}
u\in F\cap G \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}u\in F\\u\in G\end{cases}\quad&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\\ x+y+z+t=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+\mu\\2\lambda\\3\lambda+\mu\\4\lambda\end{bmatrix}\\ \lambda+\mu+2\lambda+3\lambda+\mu+4\lambda=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y,z,t)=(\lambda+\mu,2\lambda,3\lambda+\mu,4\lambda)\\ 10\lambda+2\mu=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y,z,t)=(\lambda+\mu,2\lambda,3\lambda+\mu,4\lambda)\\ \mu=-5\lambda\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad (x,y,z,t)=(\lambda-5\lambda,2\lambda,3\lambda-5\lambda,4\lambda)\\
&\Leftrightarrow\quad \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad (x,y,z,t)=\lambda(-4,2,-2,4).
\end{aligned}$$

D'où,

$$F\cap G=\left\{2\lambda(-2,1,-1,2)\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{F \cap G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right).}$$

3.4 Soient $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, f'' = f \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \cos)$. Soit (E) l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants : $f'' - f = 0$. L'équation caractéristique associée est $(E_c) : r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont 1 et -1. Posons $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. Donc l'ensemble F des solutions est

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2).$$

Ainsi,

$$F + G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{ch}, \cos) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2, \mathrm{ch}, \cos).$$

Or on observe que $\mathrm{ch} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ et est donc une combinaison linéaire de f_1 et f_2. Donc

$$F + G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2, \cos).$$

Or on ne peut écrire aucun de ces vecteurs comme combinaison linéaire des autres (on dit que la famille $(f_1, f_2, \cos)$ est libre ou encore que ces vecteurs ne sont pas coplanaires). Conclusion,

$$\boxed{F + G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2, \cos).}$$

3.5 Soient $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \right\}$ et $G = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \right\}$. Soit $(F_c) : r^2 - 5r + 6 = 0$ l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence de F. On remarque que 2 et 3 sont les deux racines de (F_c). Donc

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Soit $(G_c) : r^2 - r - 2 = 0$ l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence de G. Soit Δ le discriminant associé $\Delta = 1 + 8 = 9$ et donc les racines sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. Donc,

$$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F + G &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right). \end{aligned}$$

Or $C_4 = C_1$ donc

$$F + G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

On note qu'aucun de ces trois vecteurs n'est combinaison linéaire des autres vecteurs. Conclusion,

$$\boxed{F + G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).}$$

3.6 Soient $F = \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $G = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0 \}$. On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ b = c \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ a+d=0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} F+G &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_5 - C_6 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 + C_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

car les opérations élémentaires sur les vecteurs ne changent pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F+G &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F+G = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

4. **Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires.**

4.1 Soient $F = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R} \}$ et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

- Soit $f \in F \cap G$. Alors $f \in F$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$. Donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = C \times (1-0) = C$. Or $f \in G$, donc
$$0 = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = C.$$
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C = 0$. D'où, $f = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et $F \cap G \subseteq \{0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$. Or on a également $\{0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\} \subseteq F \cap G$. Donc
$$F \cap G = \{0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}.$$
- *Analyse.* Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f = g + h$, $g \in F$ et $h \in G$. Alors g est constante, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = C + h(x).$$
Puis, par linéarité de l'intégrale,
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = C + \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = C \qquad \text{car } h \in G.$$
Donc $C = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - C$.

Synthèse. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Posons $C = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C$. Posons également $h = f - C$. Alors, on a bien

(i) $\quad f = C + h = g + h$

(ii) $\quad g \in F$

(iii) $\quad \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - C = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad$ par définition de C

donc $h \in G$.

Ainsi, $f \in F+G$. Donc $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq F+G$. Or on a aussi $F+G \subseteq \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc

$$F+G=\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Conclusion, les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\boxed{F \oplus G=\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

4.2 Soient $F=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$ et $G=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

- Soit $u \in F \cap G$. Alors il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$u=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad u=\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\2\lambda_2\\\lambda_1+3\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\lambda_3\\0\end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\2\lambda_2=\lambda_3\\\lambda_1+3\lambda_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\\lambda_3=2\lambda_2\\2\lambda_2=0\end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=-\lambda_2=0\\\lambda_3=0\\\lambda_2=0\end{cases}$$

Donc $u=0_{\mathbb{R}^3}$ et ainsi $F \cap G \subseteq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Or on a aussi $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subseteq F \cap G$. D'où

$$F \cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

- D'autre part,

$$F+G=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)+\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}F+G&=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) && C_2 \leftrightarrow C_3\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_3-C_1-2C_2\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow \frac{1}{3}C_3\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1-C_3\\&=\left\{x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}.\end{aligned}$$

Donc $F+G=\mathbb{R}^3$.

Conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{F \oplus G=\mathbb{R}^3.}$$

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $M^T=M$ et $M^T=-M$ et donc $M=-M$ i.e. $M=0_n$. Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \{0_n\}$. Or on a aussi $\{0_n\} \subseteq \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R})=\{0_n\}.$$

- C'est un exercice que nous avons déjà vu. Ceux qui se souviennent de la décomposition, peuvent passer la partie analyse.

  Analyse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = A + B$ avec $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors, par linéarité de la transposée,

  $$M^T = A^T + B^T = A - B \qquad \text{car } A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

  Donc

  $$\begin{cases} M = A + B \\ M^T = A - B \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{M+M^T}{2} \\ B = \frac{M-M^T}{2}. \end{cases}$$

  Synthèse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A = \frac{M+M^T}{2}$ et $B = \frac{M-M^T}{2}$. Alors

  $$\begin{array}{ll} (i) & A + B = \dfrac{M+M^T}{2} + \dfrac{M-M^T}{2} = M \\ (ii) & A^T = \dfrac{M^T + \left(M^T\right)^T}{2} = \dfrac{M^T + M}{2} = A \text{ donc } A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ (iii) & B^T = \dfrac{M^T - \left(M^T\right)^T}{2} = \dfrac{M^T - M}{2} = -B \text{ donc } B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}). \end{array}$$

  Ainsi, $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Or on a aussi $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc

  $$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Conclusion, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

4.4 Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0 \}$ et $G = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0 \}$.

- Soit $P \in F \cap G$. Alors $P(0) = P'(0) = P(1) = P'(1) = 0$. Donc 0 est une racine double de P et 1 est aussi une racine double de P. Donc P est un polynôme de degré au plus 3 ($\in \mathbb{R}_3[X]$) ayant 4 racines comptées avec multiplicité. Ainsi $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Donc $F \cap G \subseteq \left\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\right\}$. Or on a aussi $\left\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\right\} \subseteq F \cap G$. Donc

  $$F \cap G = \left\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\right\}.$$

- Calculons $F + G$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a

  $$\begin{array}{lll} P \in F & \Leftrightarrow & 0 \text{ est une racine double de } P \\ & \Leftrightarrow & X^2 \text{ divise } P \\ & \Leftrightarrow & \exists Q \in \mathbb{R}_1[X],\ P = X^2 Q \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = X^2(aX+b) = aX^3 + bX^2. \end{array}$$

  D'où

  $$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^3, X^2\right).$$

  De même, pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

  $$\begin{array}{lll} P \in G & \Leftrightarrow & 1 \text{ est une racine double de } P \\ & \Leftrightarrow & (X-1)^2 \text{ divise } P \\ & \Leftrightarrow & \exists Q \in \mathbb{R}_1[X],\ P = (X-1)^2 Q \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = (X-1)^2(aX+b) \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = \left(X^2 - 2X + 1\right)(aX+b) \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = a\left(X^3 - 2X^2 + X\right) + b\left(X^2 - 2X + 1\right). \end{array}$$

  D'où

  $$G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^3 - 2X^2 + X, X^2 - 2X + 1\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F+G &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^3, X^2\right) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^3-2X^2+X, X^2-2X+1\right) \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^3, X^2, X^3-2X^2+X, X^2-2X+1\right). \end{aligned}$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F+G &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^3, X^2, X, -2X+1\right) & C_3 \leftarrow C_3 - C_1 + 2C_2 \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^3, X^2, X, 1\right) & C_4 \leftarrow C_4 + 2C_3 \\ &= \left\{ a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; (a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4 \right\}. \end{aligned}$$

Donc $F+G = \mathbb{R}_3[X]$.

Conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}_3[X].}$$

4.5 Soit $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; f'' + 3f' + 7f = 0 \right\}$ et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = f'(0) = 0 \right\}$.

- Soit $f \in F \cap G$. Alors la fonction f vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + 3f'(x) + 7f(x) = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0. \end{cases}$$

Or on note que $0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ vérifie aussi ce même problème de Cauchy. Donc par unicité, $f = 0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Ainsi, $F \cap G \subseteq \left\{0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\}$. Or on a aussi $\left\{0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\} \subseteq E \cap G$. Donc,

$$F \cap G = \left\{0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\}.$$

- *Analyse.* Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f = g + h$, $g \in F$ et $h \in G$. Alors g est l'unique solution de $f'' + 3f' + 7f = 0$ vérifiant $g(0) = f(0) - h(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0) - h'(0) = f'(0)$. Puis $h = f - g$.
Synthèse. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Posons $y_0 = f(0)$ et $y_1 = f'(0)$. Alors le système suivant :

$$\begin{cases} g'' + 3g' + 7g = 0 \\ g(0) = y_0 \\ g'(0) = y_1 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy et admet donc une unique solution, que l'on note g. Posons également $h = f - g$. Alors

$$\begin{array}{ll} (i) & f = g + h \\ (ii) & g \text{ est solution de } g'' + 3g' + 7g = 0 \text{ donc } g \in F \\ (iii) & \begin{cases} h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - y_0 = f(0) - f(0) = 0 \\ h'(0) = f'(0) - g'(0) = f'(0) - y_1 = f'(0) - f'(0) = 0 \end{cases} \\ & \text{donc } h \in G. \end{array}$$

Ainsi, $f \in F + G$. Donc $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq F + G$. Or on a aussi, $F + G \subseteq \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc

$$F + G = \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Conclusion, les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\boxed{F \oplus G = \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

5. **Déterminer la multiplicité d'une racine.**

5.1 Soit $P = 5X^5 - 13X^4 + 12X^3 - 8X^2 + 7X - 3$. On a

$$P(1) = 5 - 13 + 12 - 8 + 7 - 3 = 0.$$

Donc 1 est une racine de P. De plus $P' = 25X^4 - 52X^3 + 36X^2 - 16X + 7$. Donc

$$P'(1) = 25 - 52 + 36 - 16 + 7 = -27 + 20 + 7 = 0.$$

Puis, $P'' = 100X^3 - 156X^2 + 72X - 16$. Donc

$$P''(1) = 100 - 156 + 72 - 16 = -56 + 72 - 16 = 0.$$

On continue, $P''' = 300X^2 - 312X + 72$. Donc,

$$P'''(1) = 300 - 312 + 72 = -12 + 72 = 60 \neq 0.$$

Donc $\boxed{\text{1 est une racine de multiplicité 3 de } P}$.

5.2 Soit $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$. On remarque directement un binôme de Newton : $P = (X+1)^3$. Donc, directement $\boxed{-1 \text{ est une racine de multiplicité 3 de } P.}$

5.3 Posons $P = (X-2)^2 \left(X^2 - 13X + 22\right)$. Il est clair que 2 est une racine de multiplicité au moins 2 de P. Posons $Q = X^2 - 13X + 22$. Alors

$$Q(2) = 4 - 26 + 22 = 0.$$

De plus $Q' = 2X - 13$ et donc $Q'(2) = 4 - 13 = -9 \neq 0$. Donc 2 est une racine simple de Q et donc $\boxed{\text{2 une racine de multiplicité 3 de } P}$.

5.4 Soit $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Commençons par rappeler les deux relations fondamentales pour j : le complexe j étant une racine 3-ième de l'unité on a $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. Ainsi

$$P(j) = j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 = j + 2 + 3j^2 + 2j + 1 = 3\left(j^2 + j + 1\right) = 0.$$

De plus $P' = 4X^3 + 6X^2 + 6X + 2$. Donc

$$P'(j) = 4j^3 + 6j^2 + 6j + 2 = 4 + 6j^2 + 6j + 2 = 6\left(j^2 + j + 1\right) = 0.$$

Et encore $P'' = 12X^2 + 12X + 6$ et donc

$$P''(j) = 12j^2 + 12j + 6 = 12\left(j^2 + j + 1\right) - 12 + 6 = -6 \neq 0.$$

Donc $P(j) = P'(j) = 0$ et $P''(j) \neq 0$. Conclusion, $\boxed{j \text{ est une racine double de } P}$.

NB : lorsque l'on sait que j est une racine de multiplicité au moins deux, puisque P est à coefficients réels, on en déduit que $j^2 = \overline{j}$ est aussi une racine de multiplicité au moins deux de P. Or $\deg(P) = 4 = 2 + 2$. Donc j et j^2 sont deux racines doubles de P.

5.5 Soit $P = X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26$. On note que $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$. Il nous suffit donc de montrer que -1 est une racine de multiplicité au moins 2 de P. On a

$$P(-1) = -1 + 6 - 10 - 20 + 51 - 26 = 0.$$

De plus $P' = 5X^4 + 24X^3 + 30X^2 - 40X - 51$ et

$$P'(-1) = 5 - 24 + 30 + 40 - 51 = 5 + 6 - 11 = 0.$$

Donc -1 est une racine de multiplicité au moins 2 de P et donc $(X+1)^2$ divise P. Conclusion,

$$\boxed{X^2 + 2X + 1 \text{ divise } X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26.}$$

5.6 Soit $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 8X + 4$. On note que $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. Il nous suffit donc de montrer que 2 est une racine de multiplicité au moins 2 de P. On a

$$P(2) = 16 - 5 \times 8 + 9 \times 4 - 8 \times 2 + 4 = 16 - 40 + 36 - 16 + 4 = 0.$$

De plus $P' = 4X^3 - 15X^2 + 18X - 8$ et

$$P'(2) = 4 \times 8 - 15 \times 4 + 18 \times 2 - 8 = 32 - 60 + 36 - 8 = 0.$$

Donc 2 est une racine de multiplicité au moins 2 de P et donc $(X-2)^2$ divise P. Conclusion,

$$\boxed{X^2 - 4X + 4 \text{ divise } X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 8X + 4.}$$