Correction de l'interrogation 1 d'entrainement
Logique et raisonnement

1. **Manipuler les implications et équivalences.**
   1.1 $\Leftarrow$
   1.2 $\Leftrightarrow$
   1.3 $\Leftrightarrow$
   1.4 $\Rightarrow$
   1.5 $\Leftarrow$
   1.6 $\Leftarrow$
   1.7 $\times$
   1.8 $\times$
   1.9 $\Leftarrow$
   1.10 $\Rightarrow$
2. **Réciproque/contraposée/négation.**
   2.1 Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La réciproque est
   $$\cos(x) = \cos(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$
   La contraposée est
   $$\cos(x) \neq \cos(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2\pi} \notin \mathbb{Z}.$$
   La négation est
   $$\frac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z} \ \text{ ET } \ \cos(x) \neq \cos(y).$$
   2.2 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La réciproque est
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \text{ ET } (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}).$$
   La contraposée est
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ n'existe pas dans } \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (f \text{ n'est pas croissante sur } \mathbb{R}) \text{ OU } (f \text{ n'est pas majorée sur } \mathbb{R}).$$
   La négation est
   $$(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \text{ ET } (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}) \text{ ET } \left(\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ n'existe pas dans } \mathbb{R}\right).$$
   2.3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La réciproque est
   $$\exists\,(m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M \quad \Rightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$
   La contraposée est
   $$\big(\forall\,(m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n < m \text{ OU } u_n > M\big) \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ diverge.}$$
   La négation est
   $$(u_n) \text{ converge ET } \big(\forall\,(m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n < m \text{ OU } u_n > M\big)$$

2.4 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite en $+\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$. La réciproque est

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \geqslant a \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > a.$$

La contraposée est

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) < a \quad \Rightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant a.$$

La négation est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > a \ \text{ ET } \ \lim_{x\to+\infty} f(x) < a.$$

2.5 Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La réciproque est

$$\begin{aligned}&\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y)\right]\\ &\quad \Rightarrow \quad \left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \ \Rightarrow \ f(x) < f(y))\right].\end{aligned}$$

La contraposée est

$$\begin{aligned}&\left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y,\ \text{tel que } f(x) = f(y)\right]\\ &\quad \Rightarrow \quad \left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \text{ tel que } f(x) \geqslant f(y)\right].\end{aligned}$$

La négation est

$$\begin{aligned}&\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \ \Rightarrow \ f(x) < f(y))\right]\\ &\quad \text{ET } \left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y,\ \text{tel que } f(x) = f(y)\right].\end{aligned}$$

3. **Quantificateurs.**

3.1 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'assertion est

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n) \ \text{ OU } \ (\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n).$$

La négation est

$$(\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n) \ \text{ ET } \ (\exists m \in \mathbb{N},\ u_{m+1} > u_m).$$

3.2 L'assertion est

$$\begin{aligned}&\left(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow \ f(x) \leqslant f(y)\right)\\ &\text{ET } \left(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_-)^2,\ x < y \ \Rightarrow \ f(x) > f(y)\right).\end{aligned}$$

La négation est donc,

$$\begin{aligned}&\left(\exists (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x \leqslant y,\ f(x) > f(y)\right)\\ &\text{OU } \left(\exists (x,y) \in (\mathbb{R}_-)^2,\ x < y,\ f(x) \leqslant f(y)\right).\end{aligned}$$

3.3 L'assertion est

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ \pi \neq \frac{p}{q}.$$

La négation est

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ \pi = \frac{p}{q}.$$

3.4 Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'assertion est

$$\forall f \in \mathscr{E},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.$$

La négation est

$$\exists f \in \mathscr{E},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0.$$

3.5 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{Z}.$$

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \notin \mathbb{Z}.$$

4. **Récurrence.**

4.1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Si $n=1$, alors $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons $P(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n+n+1 &= \frac{n(n+1)}{2}+n+1\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

4.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Si $n=1$, alors $\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons $P(n+1)$. Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{\left(2n^2+n+6n+6\right)(n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

4.3 Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ l'assertion $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Initialisation. Si $n=0$, alors $\frac{1-x}{1-x} = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$. Puisque $P(n)$ est vraie, on a $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Donc

$$\begin{aligned}1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}+x^{n+1}\\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x}\\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\qquad 1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.}$$

4.4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n = \frac{5^n - 1}{2}$.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $\frac{5^n-1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $u_n = \frac{5^n-1}{2}$. Montrons $P(n+1)$. Par définition de la suite,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = 5u_n + 2 &= 5\frac{5^n - 1}{2} + 2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{5^{n+1} - 5 + 4}{4} \\ &= \frac{5^{n+1} - 1}{4}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.
Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{5^n - 1}{2}.}$$

4.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n = 4^n - (-2)^n$. Procédons à une récurrence double.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $4^n - (-2)^n = 1 - 1 = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
Si $n = 1$, alors $4^n - (-2)^n = 4 - (-2) = 6 = u_1$. Donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(P(n)$ ET $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Alors $u_n = 4^n - (-2)^n$ et $u_{n+1} = 4^{n+1} - (-2)^{n+1}$. Par définition de la suite,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 8u_n \\ &= 2\left(4^{n+1} - (-2)^{n+1}\right) + 8\left(4^n - (-2)^n\right) \\ &\qquad \text{par les hypothèses de récurrence} \\ &= 2 \times 4^{n+1} - 2 \times (-2)^{n+1} + 2 \times 4 \times 4^n - (-4)(-2)(-2)^n \\ &= 2 \times 4^{n+1} - 2 \times (-2)^{n+1} + 2 \times 4^{n+1} - (-4)(-2)^{n+1} \\ &= 4^{n+1}(2+2) - (-2)^{n+1}(2-4) \\ &= 4^{n+2} - (-2)^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est aussi vraie.
Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^n - (-2)^n.}$$

4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2}{n+1}$. On commence par calculer les premiers termes. On a

$$u_1 = \frac{u_0^2}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Puis,

$$u_2 = \frac{u_0^2 + u_1^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Et encore,

$$u_3 = \frac{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2}{3} = \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

On conjecture alors le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1.$$

Procédons à une récurrence forte. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n = 1$.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = 1$ par hypothèse. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\forall k \leqslant n,\ P(k)) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $P(k)$ est vraie. Alors pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $u_k = 1$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Par définition de la suite, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2}{n+1} = \frac{1 + 1 + \cdots + 1}{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

Donc $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$ et $P(n+1)$ est aussi vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1.}$$

5. **Calcul dans $\mathbb{R}$.** Je vous présente pour chaque question deux méthodes de résolution. Par analyse-synthèse ou directement par équivalences. N'hésitez pas à vous entrainer sur les deux.

5.1 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1} = x+2 &\Rightarrow x^2-1 = (x+2)^2 = x^2+4x+4\\ &\Rightarrow 4x = -5\\ &\Rightarrow x = -\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x = -\frac{5}{4}$, on a $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{25}{16}-1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ et $x+2 = -\frac{5}{4}+2 = \frac{3}{4}$ donc $-\frac{5}{4}$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2-1} = x+2 \iff x = -\frac{5}{4}}.$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}& \sqrt{x^2-1} = x+2\\ \iff\ & x^2-1 = (x+2)^2 = x^2+4x+4 \text{ ET } x^2-1 \geqslant 0 \text{ ET } x+2 \geqslant 0\\ \iff\ & 4x = -5 \text{ ET } x^2 \geqslant 1 \text{ ET } x \geqslant -2\\ \iff\ & x = -\frac{5}{4} \text{ ET } x^2 \geqslant 1 \text{ ET } x \geqslant -2\\ \iff\ & x = -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2-1} = x+2 \iff x = -\frac{5}{4}}.$$

5.2 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1} &\Rightarrow x-1 = 2x+1\\ &\Rightarrow x = -2.\end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x = -2$, on a $\sqrt{x-1} = \sqrt{-3}$ n'existe pas !
Conclusion, $\boxed{\text{cette équation n'admet aucune solution}}$.
Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1} \quad &\iff \quad x-1 = 2x+1 \text{ ET } x-1 \geqslant 0 \text{ ET } 2x+1 \geqslant 0\\ &\iff \quad x = -2 \text{ ET } x \geqslant 1 \text{ ET } x \geqslant -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Conclusion, $\boxed{\text{cette équation n'admet aucune solution}}$.

5.3 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2} &\Rightarrow x+5 = 2x+2\\ &\Rightarrow x = 3.\end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x = 3$, on a $\sqrt{x+5} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{2x+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Donc $x = 3$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2} \quad \iff \quad x = 3.}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2} \quad &\iff \quad x+5 = 2x+2 \text{ ET } x+5 \geqslant 0 \text{ ET } 2x+2 \geqslant 0\\ &\iff \quad x = 3 \text{ ET } x \geqslant -5 \text{ ET } x \geqslant -1\\ &\iff \quad x = 3.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3.}$$

5.4 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 - x - 3} = x + 1 &\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = x^2 + 2x + 1\\ &\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 9 + 16 = 25$. Donc $x = \frac{3+5}{2} = 4$ ou $x = \frac{3-5}{2} = -1$. Synthèse : si $x = 4$, on a $\sqrt{2x^2 - x - 3} = \sqrt{32 - 4 - 3} = 5 = x + 1$ Donc $x = 4$ est une solution. Si $x = -1$, alors $\sqrt{2x^2 - x - 3} = \sqrt{2 + 1 - 3} = 0 = -1 + 1$ Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2 - x - 3} = x + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 4 \ \text{ OU } \ x = -1.}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x^2 - x - 3} = x + 1\\ \Leftrightarrow \quad & 2x^2 - x - 3 = x^2 + 2x + 1 \ \text{ ET } \ 2x^2 - x - 3 \geqslant 0 \ \text{ ET } \ x + 1 \geqslant 0\\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 3x - 4 = 0 \ \text{ ET } \ 2x^2 - x - 3 \geqslant 0 \ \text{ ET } \ x \geqslant -1.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 - 3x - 4 = 0$, on a $\Delta = 9 + 16 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{3+5}{2} = 4$ et $\frac{3-5}{2} = -1$. De plus, si Δ' le discriminant de $2x^2 - x - 3$, $\Delta' = 1 + 24 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{1-5}{4} = -1$ et $\frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x^2 - x - 3} = x + 1\\ \Leftrightarrow \quad & (x = -1 \ \text{ OU } \ x = 4) \ \text{ ET } \ \left(x \leqslant -1 \ \text{ OU } \ x \geqslant \frac{3}{2}\right) \ \text{ ET } \ x \geqslant -1\\ \Leftrightarrow \quad & x = -1 \ \text{ OU } \ x = 4\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2 - x - 3} = x + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 4 \ \text{ OU } \ x = -1.}$$

5.5 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}x = -1 + \sqrt{x^2 - 2} &\Rightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 - 2}\\ &\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2\\ &\Rightarrow x = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Synthèse : si $x = -\frac{3}{2}$, on a $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = 1 + x$ Donc $x = -\frac{3}{2}$ n'est pas solution. Conclusion,

$$\boxed{x = -1 + \sqrt{x^2 - 2} \text{ n'admet aucune solution.}}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x = -1 + \sqrt{x^2 - 2} &\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 - 2}\\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2 \ \text{ ET } \ x + 1 \geqslant 0 \ \text{ ET } \ x^2 - 2\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \ \text{ ET } \ x \geqslant -1 \ \text{ ET } \ x^2 \geqslant 2,\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Conclusion,

$$\boxed{x = -1 + \sqrt{x^2 - 2} \text{ n'admet aucune solution.}}$$