Interrogation 20 d'entrainement
Familles de vecteurs

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir et caractériser une famille libre.
   1.2 Définir et caractériser une famille liée.
   1.3 Définir une famille génératrice.
   1.4 Définir et caractériser une base.
   1.5 Enoncer le théorème de la base adaptée.
   1.6 Comment obtient-on les coordonnées ?

   Révisions

   1.7 Enoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
   1.8 Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
   1.9 Définir l'injectivité et la surjectivité.
   1.10 Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse.

2. **Familles génératrices.**
   2.1 Déterminer une famille génératrice de $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - z = -3y + t = 2x + 9y - 2z - 3t = 0 \right\}$.
   2.2 Déterminer une famille génératrice de $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; f'' + 3f' + 5f = 0 \right\}$.
   2.3 Montrer que $\mathscr{G} = \left(1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.
   2.4 Montrer que $\mathscr{G} = (x \mapsto 1, x \mapsto \cos(2x))$ est génératrice dans $F = \mathrm{Vect}\left(\cos^2, \sin^2\right)$.
   2.5 La famille $\mathscr{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-elle génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

3. **Familles libres/liées.**
   3.1 Déterminer si $\mathscr{L} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est libre ou liée.
   3.2 Déterminer si $\mathscr{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre ou liée.
   3.3 Soient $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille libre de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs d'un espace vectoriel E. On pose pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $v_i = \sum_{j=1}^{i} u_j$. Montrer que $\mathscr{L} = (v_1, \dots, v_p)$ est libre.
   3.4 Montrer que $\mathscr{L} = \left(X(X-1)^2, X^2(X-1), X^3, (X-1)^3\right)$ est libre.
   3.5 Déterminer si $\mathscr{L} = (x \mapsto |x|, x \mapsto |x-1|, x \mapsto |x+1|)$ est libre ou liée.
   3.6 Déterminer si $\mathscr{L} = \left(x \mapsto \sin\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)\right)_{k \in [\![0;3]\!]}$ est libre ou liée.

4. **Coordonnées d'un vecteur.**
   4.1 Soit $\mathscr{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto \sin(x), x \mapsto \sin(2x), x \mapsto \sin(3x), x \mapsto \sin(4x), x \mapsto \sin(5x))$. On admet que $\mathscr{B}$ est libre et on pose $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$. Montrer que $f : x \mapsto \sin^5(x)$ appartient à E et déterminer les coordonnées de f dans $\mathscr{B}$.
   4.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{B} = \left((X-1)^k\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$. Justifier que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ et déterminer les coordonnées de P dans $\mathscr{B} = \left((X-1)^k\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$.
   Indication : D'après la formule de T...
   4.3 Soit $\mathscr{B} = ((2, 3, -1), (1, -1, -2))$. Montrer que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $u = (5, 0, -7)$. Montrer que $u \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ et déterminer les coordonnées de u dans $\mathscr{B}$.

4.4 Soit $\mathscr{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} \right)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{C}^3$ puis déterminer les coordonnées de $u = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{bmatrix}$ dans $\mathscr{B}$.

4.5 Soit $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$. Montrer $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$.

5. **Théorème de la base adaptée.**

5.1 Soient $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x+y+z = x+y-z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ (x+y, x+y, y) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5.2 Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; c = d = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a-b = a+b-2c = 0 \right\}$. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5.3 Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

5.4 Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0 \}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

5.5 Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a+b+c+d = 0 \right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.