Interrogation 22 d'entrainement
Dimension

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Enoncer le théorème de la base extraite.
   1.2 Enoncer le théorème de la base incomplète.
   1.3 Caractériser par la dimension le fait qu'une famille soit une base.
   1.4 Caractériser par la dimension le fait que deux sous-espaces vectoriels soient égaux.
   1.5 Caractériser par le rang le fait qu'une famille soit génératrice/libre/base.
   1.6 Enoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.
   1.7 Préciser la dimension d'une commode.

   Révisions

   1.8 Donner la définition de deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire ?
   1.9 Définir la convergence d'une suite complexe (définition IV.1).
   1.10 Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ soit croissante et comment le démontre-t-on ?
   1.11 Donner la forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   1.12 Donner la définition d'une suite extraite. Quand est-ce qu'une suite extraite converge-t-elle ?

2. **Déterminer la dimension d'un espace vectoriel.**
   2.1 Déterminer la dimension de $E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{array} \right\}$.
   2.2 Déterminer la dimension de $E = \mathrm{Vect}\left((3,0,1),(2,-1,-1),(1,1,2)\right)$.
   2.3 Déterminer la dimension de $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.
   2.4 Déterminer la dimension de $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0 \right\}$.
   2.5 Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille 3×3.

3. **Compléter une famille libre en une base.**
   3.1 Déterminer un supplémentaire de $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x-2y+3z-3t=0 \\ -x+y+z-t=0 \end{array} \right\}$.
   3.2 Justifier que $\mathscr{L} = \left(1+2X+3X^2+4X^3, 1-X+X^2+X^3\right)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   3.3 Déterminer un supplémentaire de $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{r} 2a+4b+4c-3d=0 \\ a-b-c-d=0 \\ 5b+5c-8d=0 \end{array} \right\}$.
   3.4 Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $\varepsilon_k = \sum_{i=1}^k ie_i$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ est une base de E.
   3.5 Déterminer un supplémentaire de $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x+2z-2t=0 \\ x+2y+3z-5t=0 \end{array} \right\}$.

4. **Calcul du rang.**
   4.1 Soit $\mathscr{F} = \left(3+X+X^2, 5-2X^2, 3X+X^2, 1-X+X^2\right)$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   4.2 Soit $\mathscr{F} = \left((1,0,-2),(4,2,1),(-1,3,1),(0,3,3)\right)$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   4.3 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = 2$ et $\mathscr{F} = \left(P, P', P'', P^{(3)}, P^{(4)}\right)$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   4.4 Calculer le rang de $\mathscr{F} = \left((2)_{n\in\mathbb{N}}, (n!)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}, (5+2n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
   4.5 Soient $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif et $E = \mathscr{F}([-\varepsilon,\varepsilon],\mathbb{R})$. On considère dans E la famille $\mathscr{F} = \left(x \mapsto \cos(x), x \mapsto x\cos(x), x \mapsto x^2\cos(x)\right)$. Montrer que $\mathscr{F}$ est libre et en déduire son rang.
   Indication : un tout petit DL...

5. **Montrer la supplémentarité à l'aide de la dimension.**

5.1 Démontrer à l'aide de la dimension que les sous-espaces vectoriels $F = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) = 0 \}$ et $G = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = 0 \}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

5.2 Démontrer à l'aide de la dimension que $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x + 2y - z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((0, 0, -1)\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5.3 Démontrer à l'aide de la dimension que $F = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0 \}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5.4 Démontrer que $F = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1), (0, 4, 0), (1, -2, 1)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 0)\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5.5 Démontrer à l'aide de la dimension que $F = \mathbb{R}_3[X]$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X^5, X + X^4\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_5[X]$.

5.6 A l'aide du théorème de la division euclidienne, montrer que $F = \{ P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(3) = P'(3) = P''(3) = 0 \}$ et $G = \mathbb{R}_2[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_5[X]$.