Correction de l'interrogation 22 d'entrainement Dimension

1. **Restituer le cours.**

   1.1 Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie. De toute famille $\mathscr{G}$ finie de vecteurs de E, génératrice dans E, il existe une sous-famille $\mathscr{B}$ de $\mathscr{G}$ qui soit une base de E.

   1.2 Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E. En ajoutant des vecteurs de $\mathscr{G}$ à $\mathscr{L}$, il est possible de construire $\mathscr{B}$ une sur-famille de $\mathscr{L}$ qui soit une base de E.

   1.3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. Si (au moins) deux des assertions suivantes sont vraies

   1. $\mathscr{F}$ est génératrice dans E.
   2. $\mathscr{F}$ est libre.
   3. $\text{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$.

   Alors $\mathscr{F}$ est une base de E.

   1.4 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si (au moins) deux des assertions suivantes sont vraies

   1. $F \subseteq G$
   2. $G \subseteq F$
   3. $\dim(F) = \dim(G)$.

   Alors $F = G$.

   1.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E. Alors

   - $\mathscr{F}$ est génératrice dans E si et seulement si $\text{rg}(\mathscr{F}) = n$.
   - $\mathscr{F}$ est libre dans E si et seulement si $\text{rg}(\mathscr{F}) = p$.
   - $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\text{rg}(\mathscr{F}) = n = p$.

   1.6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a

   $$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

   De plus, F et G sont supplémentaires dans E si (au moins) deux des assertions suivantes sont vérifiées :

   1. $F \cap G = \{0_E\}$.
   2. $F + G = E$.
   3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

   1.7 Une commode est décrite par sa largeur, sa longueur et sa profondeur donc elle est de dimension... Piège ! Une commode n'est pas un espace vectoriel. En effet si vous prenez deux cintres appartenant à la commode alors la somme des deux cintres n'est pas un cintre évidemment (ou alors c'est un cintre pour manteau de chameau... mais cette extension est hors programme de ptsi). Donc la commode n'est pas stable (même avec une cale) par addition et n'est donc pas un espace vectoriel, il est donc absurde de parler de dimension. Bref, la question n'était pas commode. De plus le théorème de Grassmat' dit qu'il vaut mieux s'intéresser au lit.

2. **Déterminer la dimension d'un espace vectoriel.**

2.1 Soit $E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{array} \right\}$. Soit $u \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \in E \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -7y-4z=0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2y-z = \frac{8}{7}z - z = \frac{z}{7} \\ y = -\frac{4}{7}z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} z/7 \\ -4z/7 \\ z \end{bmatrix} = \frac{z}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} \right).$$

Posons $e = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ et $\mathscr{B} = (e)$. Puisque $e \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\mathscr{B}$ est libre et génère E donc est une base de E. Conclusion, E est une droite vectorielle :

$$\boxed{\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 1.}$$

2.2 Soit $E = \mathrm{Vect}((3,0,1),(2,-1,-1),(1,1,2))$. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré donc par opérations élémentaires, on a

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftrightarrow C_3 \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \end{array}. \end{aligned}$$

Puisque $C_2 = C_3$, on enlève C_3 :

$$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \right).$$

Posons $\mathscr{B} = ((1,1,2),(0,-3,-5))$. Par ce qui précède $\mathscr{B}$ est génératrice dans E et composée de deux vecteurs non colinéaires donc $\mathscr{B}$ est libre et forme une base de E. Conclusion, E est un plan vectoriel :

$$\boxed{\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 2.}$$

2.3 Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. En notant toujours P la fonction polynomiale associée, on a

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3\,\mathrm{d}t = \left[a_0t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3 + \frac{a_3}{4}t^4 \right]_{t=0}^{t=1} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = -\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3} - \frac{a_3}{4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E &= \left\{ -\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3} - \frac{a_3}{4} + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \frac{a_1}{2}(2X-1) + \frac{a_2}{3}\left(3X^2-1\right) + \frac{a_3}{4}\left(4X^3-1\right) \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \tilde{a_1}(2X-1) + \tilde{a_2}\left(3X^2-1\right) + \tilde{a_3}\left(4X^3-1\right) \in \mathbb{R}_3[X] \mid (\tilde{a_1},\tilde{a_2},\tilde{a_3}) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(2X-1,\, 3X^2-1,\, 4X^3-1\right) \end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B} = \left(2X-1, 3X^2-1, 4X^3-1\right)$. $\mathscr{B}$ est génératrice dans E. De plus $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}$ est libre et donc est une base de E. Conclusion,

$$\boxed{\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3.}$$

2.4 Soit $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0 \right\}$. On pose $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,0,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,0,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,0,1,0,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,0,0,1,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{B} = (u,v,w,x)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de E.

- Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_0\, u + \lambda_1\, v + \lambda_2\, w + \lambda_3\, x = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. Posons $y = \lambda_0\, u + \lambda_1\, v + \lambda_2\, w + \lambda_3\, x$ alors

$$\begin{aligned} y &= \lambda_0\,(1,0,0,\dots) + \lambda_1\,(0,1,0,0,\dots) + \lambda_2\,(0,0,1,0,0,\dots) + \lambda_3\,(0,0,0,1,0,\dots) \\ &= (\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0,0,\dots). \end{aligned}$$

  i.e. en notant $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $y_0 = \lambda_0$, $y_1 = \lambda_1$, $y_2 = \lambda_2$, $y_3 = \lambda_3$ et pour tout $n \geqslant 4$, $y_n = 0$. Mais $y = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = 0$. En particulier

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

  Donc $\mathscr{B}$ est libre.
- Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in E \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \geqslant 4,\ y_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = (y_0,y_1,y_2,y_3,0,\dots) = y_0\,(1,0,0,\dots) + y_1\,(0,1,0,\dots) + y_2\,(0,0,1,0,\dots) \\ &\Leftrightarrow \quad y = y_0 u + y_1 v + y_2 w + y_3 x. \end{aligned}$$

  Donc

$$E = \mathrm{Vect}(u,v,w,x) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$$

  et $\mathscr{B}$ est génératrice dans E.

Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de E. Conclusion, E est de dimension finie et

$$\boxed{\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 4.}$$

2.5 On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a_{11},a_{12},a_{13},a_{22},a_{23},a_{33}) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$. Notons $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)$. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \lambda_i\, e_i = 0_3$. Alors,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix} = 0_3 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$. Conclusion,

$$\boxed{\dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 6.}$$

3. **Compléter une famille libre en une base.**

3.1 Soit $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x-2y+3z-3t=0 \\ -x+y+z-t=0 \end{array} \right\}$. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} 5z-5t=0 \\ -x+y+z-t=0 \end{array} \right\} && L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} z=t \\ -x+y=0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} z=t \\ x=y \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x,x,z,z) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}_{\mathscr{B}_F}. \end{aligned}$$

$\mathscr{B}_F$ engendre F et est composée de deux vecteurs non colinéaires donc $\mathscr{B}_F$ est libre et est donc une base de F. Ainsi $\dim(F) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_F) = 2$.

On constate que les pivots manquants sont en coordonnées 2 et 4. Posons $\mathscr{B}_G = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et $G = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_G)$. $\mathscr{B}_G$ est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires et $\mathscr{B}_G$ engendre G donc est une base de G. En particulier $\dim(G) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G) = 2$.

Alors

- $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$.
- *Méthode 1 : par le caractère libre.* Posons

$$\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

  Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \quad &\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_4 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{B}$ est libre. Donc par le théorème de la base adaptée, F et G sont en somme directe.
- *Méthode 2 : par le caractère générateur.* Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré

donc

$$\begin{aligned}
F+G &= \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_F\right)+\mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_G\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_1\leftarrow C_1-C_3\\ C_2\leftarrow C_2-C_4\end{array}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_2\leftrightarrow C_3\\
&= \mathbb{R}^4 \qquad \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{R}^4.
\end{aligned}$$

Naturellement les deux méthodes sont au choix, ne pas faire les deux lors de l'évaluation.
Conclusion,

$$\boxed{G=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \text{ est un supplémentaire de } F.}$$

3.2 La famille $\mathscr{L}$ est formée de deux vecteurs non colinéaires donc $\boxed{\mathscr{L} \text{ est libre}}$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \left(1+2X+3X^2+4X^3, 1-X+X^2+X^3\right)\\
&\underset{\mathscr{C}}{\sim} \left(-3+6X-X^2, 1-X+X^2+X^3\right) && C_1\leftarrow C_1-4C_2.
\end{aligned}$$

On constate alors que des pivots sont manquants en 1 et en X.
Posons $\mathscr{B}=\left(1,X,1+2X+3X^2+4X^3,1-X+X^2+X^3\right)$. Alors,

- *Méthode 1 : par le caractère libre.* Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$a+bX+c\left(1+2X+3X^2+4X^3\right)+d\left(1-X+X^2+X^3\right)=0_{\mathbb{R}[X]}.$$

  Dès lors,

$$\begin{aligned}
& a+c+d+(b+2c-d)X+(3c+d)X^2+(4c+d)X^3=0_{\mathbb{R}[X]}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}a+c+d=0\\ b+2c-d=0\\ 3c+d=0\\ 4c+d=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}a+c+d=0\\ b+2c-d=0\\ 3c+d=0\\ c=0\end{cases} && L_4\leftarrow L_4-L_3\\
\Leftrightarrow\ & a=b=c=d=0.
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{B}$ est libre.

- *Méthode 2 : par le caractère générateur.* Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}) &= \mathrm{Vect}\left(1, X, 1+2X+3X^2+4X^3, 1-X+X^2+X^3\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(1, X, 3X^2+4X^3, X^2+X^3\right) && \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - 2C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 + C_2 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2+X^3, 3X^2+4X^3\right) && C_3 \leftrightarrow C_4 \\
&= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2+X^3, X^3\right) && C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3 \\
&= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, X^3\right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \\
&= \mathbb{R}_3[X] && \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}_3[X].
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathbb{R}_3[X]$.

- De plus $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 4 = \dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right)$.

Naturellement les deux méthodes sont au choix, ne pas faire les deux lors de l'évaluation.

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est bien une sur-famille de } \mathscr{L} \text{ et une base de } \mathbb{R}_3[X].}$$

3.3 Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{r} 2a+4b+4c-3d=0 \\ a-b-c-d=0 \\ 5b+5c-8d=0 \end{array} \right\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes : On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}
A \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a+4b+4c-3d=0 \\ a-b-c-d=0 \\ 5b+5c-8d=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b-c-d=0 \\ 2a+4b+4c-3d=0 \\ 5b+5c-8d=0 \end{cases} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b-c-d=0 \\ 6b+6c-d=0 \\ 5b+5c-8d=0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b-c-d=0 \\ b+c+7d=0 \\ 5b+5c-8d=0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b-c-d=0 \\ b+c+7d=0 \\ -43d=0 \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+c-c-0=0 \\ b=-c \\ d=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=0 \\ b=-c \\ d=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$F = \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{\mathscr{B}_F}.$$

$\mathscr{B}_F$ engendre F et est constituée d'un vecteur non nul et est donc libre. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\dim\,(F) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_F) = 1$.

On constate qu'il manque des pivots dans les coordonnées 1, 3 et 4.

Posons $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{Vect}\,(\mathscr{B}_G)$. $\mathscr{B}_G$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$ et engendre G donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G et donc $\dim\,(G) = \text{Card}\,(\mathscr{B}_G) = 3$.

- $\dim\,(F) + \dim\,(G) = 1 + 3 = 4 = \dim\,(\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R}))$.
- *Méthode 1 : par le caractère générateur.* On a

$$F + G = \text{Vect}\,(\mathscr{B}_F) + \text{Vect}\,(\mathscr{B}_G) = \text{Vect}\,(\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) & C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) & C_1 \leftarrow -C_1 \\ &= \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})\,, \end{aligned}$$

car, quitte à permuter les vecteurs, on reconnait la base canonique de $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$.

- *Méthode 2 : par le caractère libre.* Posons $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G) = \left(\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = O_2.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix}b & -a\\a+c & d\end{pmatrix} = O_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} b = 0 \\ -a = 0 \\ a + c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = d = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Donc par le théorème de la base adaptée, F et G sont en somme directe.

Naturellement les deux méthodes sont au choix, ne pas faire les deux lors de l'évaluation.

Conclusion, par le deux points précédents,

$$\boxed{G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) \text{ est un supplémentaire de } F.}$$

3.4 Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on pose $\varepsilon_k = \sum_{i=1}^{k} ie_i$.

- Puisque $\mathscr{B}$ est une base de E, on a $\dim\,(E) = \text{Card}\,(\mathscr{B}) = n$. Donc on a déjà

$$\text{Card}\,(\mathscr{B}') = n = \dim\,(E)\,.$$

- Montrons que $\mathscr{B}'$ est libre *(presque identique à la question 3.3 de l'interro d'entrainement 19)*. Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\varepsilon_k = 0_E$. Alors

$$0_E = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{i=1}^{k} ie_i.$$

On reconnait une somme triangulaire. Donc

$$0_E = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \lambda_k\right) ie_i$$

Or la famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est libre donc

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \qquad \left(\sum_{k=i}^{n} \lambda_k\right) i = 0_{\mathbb{K}} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=i}^{n} \lambda_k = 0_{\mathbb{K}} \qquad \text{car } i \neq 0.$$

On obtient donc le système triangulaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \quad \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \quad \vdots \\ \quad \lambda_n = 0. \end{cases}$$

Ce système est possède n pivots et n lignes et donc ne présente qu'une seule solution : $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$. Donc $\mathscr{B}'$ est libre.

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } E.}$$

3.5 Soit $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ \begin{array}{c} 2x + 2z - 2t = 0 \\ x + 2y + 3z - 5t = 0 \end{array} \right\}$. On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ \begin{array}{c} -4y - 4z + 8t = 0 \\ x + 2y + 3z - 5t = 0 \end{array} \right\} && L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ \begin{array}{l} y = -z + 2t \\ x - 2z + 4t + 3z - 5t = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ \begin{array}{l} y = -z + 2t \\ x = -z + t \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (-z+t, -z-2t, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_F} \end{aligned}$$

$\mathscr{B}_F$ engendre donc F et est formée de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\mathscr{B}_F$ est libre et est une base de F. Donc $\dim(F) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_F) = 2$.

On constate que $\mathscr{B}_F$ est échelonnée sur les dernières coordonnées, on la complète donc de la façon suivante :

Posons $\mathscr{B}_G = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ et $G = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_G)$. La famille $\mathscr{B}_G$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique et engendre G donc est une base de G. Donc $\dim(G) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G) = 2$.

- $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.
- *Méthode 1 : par le caractère libre.* Posons $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_G, \mathscr{B}_F) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Alors,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_4 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Donc par le théorème de la base adaptée, on en déduit que F et G sont en somme directe.

- *Méthode 2 : par le caractère générateur.* On a

$$F+G=G+F=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_G\right)+\mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_F\right)=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}F+G&=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_3\leftarrow C_3+C_1+C_2\\ C_4\leftarrow C_4-C_1+2C_3\end{array}\\ &=\mathbb{R}^4 && \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}^4.\end{aligned}$$

Naturellement les deux méthodes sont au choix, ne pas faire les deux lors de l'évaluation.
Conclusion, par les deux points précédents,

$$\boxed{G=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)\text{ est un supplémentaire à } F.}$$

4. **Calcul du rang.**

4.1 Soit $\mathscr{F}=\left(3+X+X^2,5-2X^2,3X+X^2,1-X+X^2\right)$. On a les égalités suivantes entre réels :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\left(\mathscr{F}\right)&=\mathrm{rg}\left(X^2+X+3,2X+11,2X-3,-2X-2\right) && \begin{array}{ll}C_2&\leftarrow C_2+2C_1,\\ C_3&\leftarrow C_3-C_1,\\ C_4&\leftarrow C_4-C_1\end{array}\\ &=\mathrm{rg}\left(X^2+X+3,2X+11,-14,9\right) && \begin{array}{ll}C_3&\leftarrow C_3-C_2,\\ C_4&\leftarrow C_4+C_2\end{array}\\ &=\mathrm{rg}\left(X^2+X+3,2X+11,-14,0\right) && C_4\leftarrow C_3+\frac{9}{14}C_3\\ &=\mathrm{rg}\left(X^2+X+3,2X+11,-14\right)\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{L}=\left(X^2+X+3,2X+11,-14\right)$ est une famille de polynômes de degrés distincts et est donc libre. Donc $\mathrm{rg}\left(\mathscr{L}\right)=\mathrm{Card}\left(\mathscr{L}\right)=3$. D'où,

$$\boxed{\mathrm{rg}\left(\mathscr{F}\right)=3.}$$

NB : puisque Card $(\mathscr{F})=4>3=\dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$, *on savait dès le départ que* $\mathscr{F}$ *était liée ou encore que rg* $(\mathscr{F})\leqslant 3$.

4.2 Soit $\mathscr{F}=((1,0,-2),(4,2,1),(-1,3,1),(0,3,3))$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\left(\mathscr{F}\right)&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{ll}C_2&\leftarrow C_2-4C_1,\\ C_3&\leftarrow C_3+C_1\end{array}\\ &=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right) && C_4\leftarrow C_4-C_3\\ &=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-29\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{ll}C_3&\leftarrow 2C_3-3C_2\\ C_4&\leftarrow \frac{1}{4}C_4\end{array}\\ &=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \text{car }\begin{pmatrix}0\\0\\-29\end{pmatrix}=-29\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\mathscr{F}) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{ll} C_1 & \leftarrow C_1+2C_3 \\ C_2 & \leftarrow C_2-9C_4\end{array}\\
&= \operatorname{rg}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{L}} && C_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}C_2
\end{aligned}$$

On reconnaît alors $\mathscr{L}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ qui est notamment libre. Donc $\operatorname{rg}(\mathscr{L}) = \operatorname{Card}(\mathscr{L}) = 3$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = 3.}$$

NB : puisque Card$(\mathscr{F}) = 4 > 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$, on savait dès le départ que $\mathscr{F}$ était liée ou encore que rg$(\mathscr{F}) \leqslant 3$.

4.3 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = 2$ et $\mathscr{F} = \left(P, P', P'', P^{(3)}, P^{(4)}\right)$. Puisque $\deg(P) = 2$, on sait que $P^{(3)} = P^{(4)} = 0$. Donc $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \operatorname{rg}(P, P', P'')$. Puisque $\deg(P) = 2$, on sait également que $\deg(P') = 1$ et $\deg(P'') = 0$. Donc $\mathscr{L} = (P, P', P'')$ est une famille de polynômes de degrés distincts. Donc $\mathscr{L}$ est libre. Ainsi $\operatorname{rg}(\mathscr{L}) = \operatorname{Card}(\mathscr{L}) = 3$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = 3.}$$

4.4 Soit $\mathscr{F} = \left((2)_{n\in\mathbb{N}}, (n!)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}, (5+2n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Puisque $(5+2n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{5}{2} \times (2)_{n\in\mathbb{N}} + 2 \times (n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que

$$\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \operatorname{rg}\underbrace{\left((2)_{n\in\mathbb{N}}, (n!)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}_{=\mathscr{L}}$$

Montrons que $\mathscr{L}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 (2)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2 (n!)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_3 (n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$ i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2\,\lambda_1 + \lambda_2\, n! + \lambda_3\, n = 0_\mathbb{R}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \neq 0$ et donc,

$$\frac{2}{n!}\,\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{(n-1)!} = 0.$$

Donc par passage à la limite, $\lambda_2 = 0$. Ainsi, $\lambda_1 (2)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_3 (n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$. De plus, si $n = 0$, on a

$$2\,\lambda_1 + \lambda_3\, 0 = 0$$

et donc $\lambda_1 = 0$. Alors, $\lambda_3 (n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$. En évaluant en $n = 1$ on obtient enfin que $\lambda_3 = 0$. Et finalement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et donc $\mathscr{L}$ est libre. Donc $\operatorname{rg}(\mathscr{L}) = \operatorname{Card}(\mathscr{L}) = 3$. Conclusion

$$\boxed{\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = 3.}$$

4.5 Soient $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif et $E = \mathscr{F}([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R})$. On considère dans E la famille

$$\mathscr{F} = \left(f_1 : x \mapsto \cos(x), f_2 : x \mapsto x\cos(x), f_3 : x \mapsto x^2\cos(x)\right).$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2 + \lambda_3\, f_3 = 0$. On obtient alors les égalités asymptotiques suivantes : pour tout x au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_1\, f_1(x) + \lambda_2\, f_2(x) + \lambda_3\, f_3(x)\\
&= \left(\lambda_1 + \lambda_2\, x + \lambda_3\, x^2\right)\cos(x)\\
0 &\underset{x\to 0}{=} \left(\lambda_1 + \lambda_2\, x + \lambda_3\, x^2\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll} \lambda_1 & & -\lambda_1 \frac{x^2}{2} & +o\left(x^2\right)\\ & +\lambda_2\, x & & +o\left(x^2\right)\\ & & +\lambda_3\, x^2 & +o\left(x^2\right)\end{array}\\
0 &\underset{x\to 0}{=} \lambda_1 + \lambda_2\, x + \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_1}{2}\right)x^2 + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 - \frac{\lambda_1}{2} = 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille $\mathscr{F}$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \operatorname{Card}(\mathscr{F}) = 3.}$$

5. **Montrer la supplémentarité à l'aide de la dimension.**

5.1 Soient $F = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) = 0 \}$ et $G = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = 0 \}$.

- D'une part montrons F et G sont en somme directe i.e. ont une intersection réduite à $\{0\}$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
P \in F \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P \in F \\ P \in G \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(0) = P(1) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad 0,\ 1 \text{ et } 2 \text{ sont racines de } P \\
&\Leftrightarrow \quad P = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \qquad \text{car } \deg(P) \leqslant 2 < 3 = \operatorname{Card}(\{0,1,2\}).
\end{aligned}$$

  Ainsi,

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \qquad (1)$$

  et F et G sont en somme directe.

- D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_0 = a_0 + a_1 + a_2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \begin{array}{c} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_2 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ a_2 \left(X^2 - X \right) \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect} \underbrace{\left(X^2 - X \right)}_{\mathscr{B}_F}.
\end{aligned}$$

  Puisque $X^2 - X$ est non nul, $\mathscr{B}_F$ est une base de F et donc $\dim(F) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_F) = 1$. De plus,

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ a_2 X^2 + a_1 X - 2a_1 - 4a_2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ a_2 \left(X^2 - 4 \right) + a_1 (X - 2) \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect} \underbrace{\left(X^2 - 4, X - 2 \right)}_{\mathscr{B}_G}.
\end{aligned}$$

  La famille $\mathscr{B}_G$ est une famille de polynômes de degrés distincts est donc libre. Or $\mathscr{B}_G$ engendre G et est donc une base de G. Donc $\dim(G) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G) = 2$. Ainsi,

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}_2[X]). \qquad (2)$$

Conclusion, les points (1) et (2) démontrent que $\boxed{F \oplus G = E}$.

5.2 Soient $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x + 2y - z = 0 \right\}$ et $G = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$.

- Soit $u \in F \cap G$ alors $u \in G$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix}$. Mais $u \in F$ donc

$$0 = 3 \times 0 + 2 \times 0 - (-\lambda) = \lambda.$$

  Ainsi $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. D'où $F \cap G \subseteq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Or $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subseteq F \cap G$. Donc

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \qquad (1).$$

- D'autre part,

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 3x+2y \right\} \\ &= \left\{ (x,y,3x+2y) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1\\0\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\2 \end{bmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_F}. \end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre F et est composée de deux vecteurs non colinéaires donc $\mathscr{B}_F$ est libre et est une base de F. Donc $\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = 2$. Enfin $\begin{bmatrix} 0\\0\\-1 \end{bmatrix}$ est non nul donc forme une famille libre engendrant G donc une base de G. Ainsi $\dim(G) = 1$ puis,

$$\dim(F) + \dim(G) = 2+1 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right). \qquad (2)$$

Conclusion, par (1) et (2), on obtient que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}$.

5.3 Soient $F = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0 \}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in F \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \in F \\ M \in G \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{tr}(M) = 0 \\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = 0,\ M = \begin{pmatrix} \lambda & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad M = 0_2. \end{aligned}$$

Donc

$$F \cap G = \{0_2\}. \qquad (1)$$

- On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a+d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)}_{\mathscr{B}_F} \end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre F. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = 0_2 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Ainsi $\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = 3$.

Puis $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ engendre G et est libre (car la matrice est non nulle) donc forme une base de G et donc $\dim(G) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_G) = 1$. D'où

$$\dim(F) + \dim(G) = 3+1 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})). \qquad (2)$$

Conclusion, par (1) et (2), on obtient que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

5.4 Soit $F = \text{Vect}\left((1,0,1),(0,4,0),(1,-2,1)\right)$ et $G = \text{Vect}\left((1,0,0)\right)$. Puisque les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a

$$F = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}\right) \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow \frac{1}{4}C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$$

On remarque alors que $C_3 = -2C_2$. Donc

$$F = \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)}_{\mathscr{B}_F}$$

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre F et est libre car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\dim(F) = \text{Card}(\mathscr{B}_F) = 2$. Posons $\mathscr{B}_G = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$. La famille $\mathscr{B}_G$ engendre G et est constitué d'un seul vecteur non nul donc est libre. $\mathscr{B}_G$ est une base de G et $\dim(G) = 1$.

- On a donc $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.
- De plus,

$$F + G = G + F = \text{Vect}(\mathscr{B}_G) + \text{Vect}(\mathscr{B}_F) = \text{Vect}(\mathscr{B}_G, \mathscr{B}_F) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

  Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) && C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_2 \\ &= \mathbb{R}^3 && \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Donc par les deux points précédents, on en déduit que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

5.5 Soient $F = \mathbb{R}_3[X]$ et $G = \text{Vect}\left(X^5, X + X^4\right)$. Posons $\mathscr{B}_G = \left(X^5, X + X^4\right)$. La famille $\mathscr{B}_G$ engendre G et possède deux vecteurs non colinéaires donc est libre. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G et donc $\dim(G) = 2$. Notons $\mathscr{B}_F = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

- On a $\dim(F) + \dim(G) = 4 + 2 = 6 = \dim(\mathbb{R}_5[X])$.
- Soit $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G) = \left(1, X, X^2, X + X^4, X^5\right)$. La famille $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes de degrés distincts et est donc libre. Donc par le théorème de la base adaptee, F et G sont en somme directe.

Par ces deux points, on en déduit que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_5[X].}$$

5.6 Soient $F = \{\, P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(3) = P'(3) = P''(3) = 0 \,\}$ et $G = \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ P \in \mathbb{R}_5[X] \,\middle|\, (X-3)^3 \text{ divise } P \right\} \\ &= \left\{ (X-3)^3 Q \,\middle|\, Q \in \mathbb{R}_2[X] \right\}. \end{aligned}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_5[X]$, par le théorème de la division euclidienne, on sait qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$P = (X-3)^3 Q + R$$

Donc $P \in F + G$. Ainsi $\mathbb{R}_5[X] \subseteq F + G$. Or F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_5[X]$ donc $F + G \subseteq \mathbb{R}_5[X]$. Ainsi $\mathbb{R}_5[X] = F + G$. De plus, toujours par le théorème de la division euclidienne, la décomposition est unique. Soit $(P_1, R_1) \in F \times G$ et $(P_2, R_2) \in F \times R_2$ tel que

$$P_1 + R_1 = P_2 + R_2.$$

Posons $P = P_1 + R_1 = P_2 + R_2$. Puisque $P_1 \in F$, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_1 = (X-3)^3 Q_1$ et de même il existe $Q_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_2 = (X-3)^3 Q_2$. Donc

$$P = (X-3)^3 Q_1 + R_1 = (X-3)^3 Q_2 + R_2.$$

Or $\deg(R_1) < 3 = \deg\left((X-3)^3\right)$ et $\deg(R_2) < 3 = \deg\left((X-3)^3\right)$. Par unicité de la division euclidienne, on en déduit que $R_1 = R_2$ et $Q_1 = Q_2$. Donc $P_1 = P_2$ ce qui démontre l'unicité de la décomposition. Donc F et G sont en somme directe. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_5[X].}$$