

## Interrogation 23 d'entraînement Dénombrement

### 1. Restituer le cours.

- 1.1 Énoncer le théorème fondamental de l'arithmétique.
- 1.2 Caractériser les bijections sur les ensembles finis.
- 1.3 Énoncer la formule de Poincaré. Cas de l'union disjointe ?
- 1.4 À quel type de tirage correspond à  $p$ -uplet ? Un arrangement ? une combinaison ?
- 1.5 Donner le nombre d'applications de  $E$  dans  $F$ . Combien sont injectives ? bijectives ?
- 1.6 Donner la notation pour l'ensemble des parties d'un ensemble. Lorsque  $E$  est fini en donner son cardinal.

### Révisions

- 1.7 Définir le polynôme dérivé.
- 1.8 Énoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
- 1.9 Énoncer les deux formules de Taylor pour les polynômes.
- 1.10 Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
- 1.11 Définir une racine de multiplicité  $m$ .
- 1.12 Caractériser la multiplicité à l'aide des dérivées.

### 2. Calculs de cardinaux.

Une association de protection du dahu lance une campagne de dénombrement des dahus vivant en France. Voici la caractéristique principale du dahu : le dahu est un animal possédant deux pattes plus courtes que les autres. Il y a donc les dextrogyres (qui ont les pattes du côté droit plus courtes et tournent donc sur la montagne toujours vers la droite) et les lévogyres (qui ont les pattes du côté gauche plus courtes). Récemment certains dahus ont muté et possèdent également des ailes (pour aller découvrir de nouvelles montagnes).

- 2.1 Parmi les 234 dahus des Pyrénées, on a recensé 91 dahus dextrogyres et 173 dahus qui sont ou lévogyres ou n'ayant pas d'aile. Combien de dahus dextrogyres sont sans aile ?
- 2.2 Parmi les 32 dahus du Massif-Central, 15 sont lévogyres, 19 possèdent des ailes et 8 sont dextrogyres avec ailes. Combien de dahus lévogyres sont sans aile ?
- 2.3 Parmi les 203 dahus des Alpes, 103 sont sans ailes, 11 sont lévogyres sans aile et 191 sont lévogyres ou sont sans aile. Combien de dahus sont dextrogyres ?
- 2.4 Parmi les dahus du Jura, 62 sont dextrogyres, 41 possèdent des ailes, 103 sont sans aile ou sont lévogyres et 87 sont dextrogyres ou sont avec des ailes. Combien y a-t-il de dahus dans le Jura ?
- 2.5 Dans les Vosges, tous les dahus dextrogyres possèdent des ailes. Parmi les 117 dahus des Vosges, 110 possèdent des ailes et 106 sont lévogyres. Combien de dahus lévogyres sont avec des ailes ?
- 2.6 Comment chasse-t-on le dahu ?

3. **Dénombrer avec des objets discernables.** Au poker on distribue au cours des enchères 5 cartes à chaque joueur parmi les 52 cartes d'un jeu classique. Le donneur dispose également de façon ordonnée 5 cartes sur la table face découverte, ce que l'on appelle les cartes communes. Pour chacune des questions, on exprimera le résultat comme un produit de combinaisons et/ou d'arrangements que l'on ne calculera pas.

- 3.1 Déterminer le nombre de mains possibles présentant une couleur : les cinq cartes sont de la même couleur.
- 3.2 Déterminer le nombre de mains possibles possédant un brelan : trois cartes de même valeur et les deux autres cartes de valeurs distinctes de la précédente valeur (mais éventuellement ces deux cartes ont la même valeur : on compte les full comme des brelans particuliers).
- 3.3 Déterminer le nombre de mains ayant une double paire (deux fois deux cartes de même valeur et une cinquième carte de valeur différente).
- 3.4 Déterminer le nombre de dispositions des cartes communes comprenant exactement deux figures (valet/dame/roi) et deux as.
- 3.5 Déterminer le nombre de dispositions des cartes communes comprenant cinq cartes de même couleur.
- 3.6 Déterminer le nombre de dispositions des cartes communes comprenant un carré d'as.

4. **Dénombrer avec des objets indiscernables.** On dispose de 5 boules rouges indiscernables, 2 boules blanches indiscernables et 3 boules vertes indiscernables. On les dispose avec ordre en ligne.

- 4.1 Combien de rangements distincts sont possibles ?
- 4.2 Combien de rangements distincts regroupent les boules par couleur ?
- 4.3 Combien de rangements distincts ne disposent pas les deux boules blanches l'une à côté de l'autre ?

On dispose de 5 boules rouges indiscernables, 5 boules blanches indiscernables et 5 boules vertes indiscernables. On tire avec ordre 5 boules.

- 4.4 Combien de rangements distincts présentent exactement deux boules rouges ?
- 4.5 Combien de rangements distincts ne présentent jamais deux boules de la même couleur côte-à-côte ?
- 4.6 Combien de rangements distincts présentent au moins deux boules rouges ?

5. **Calculer un équivalent.**

- 5.1 Calculer un équivalent en 0 de  $f(x) = e^{\cos(x)} + e^{\text{ch}(x)} - 2e$ .
- 5.2 Calculer un équivalent en 0 de  $f(x) = \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\cos(\text{sh}(x)) - 1}$ .
- 5.3 Calculer un équivalent en 0 de  $f(x) = \ln(1 + \arctan(e^x - 1)) - \ln(1 + \sin(e^x - 1))$ .
- 5.4 Calculer un équivalent en  $+\infty$  de  $u_n = \left(1 + \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n$ .
- 5.5 Calculer un équivalent en 0 de  $f(x) = \sqrt{1 + \arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)} - \sqrt{\text{ch}(x)}$ .

6. **BONUS ! Ne sera pas à l'interrogation : calculer un PGCD/PPCM.** *A faire sans calculatrice !*

- 6.1 A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers, calculer le *PGCD* et le *PPCM* de 1386 et 660.
- 6.2 A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers, calculer le *PGCD* et le *PPCM* de 1625 et 975.
- 6.3 A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers, calculer le *PGCD* et le *PPCM* de 682 et 87.
- 6.4 En appliquant l'algorithme d'Euclide, déterminer le *PGCD* de 5252 et 3346. En déduire son *PPCM*.
- 6.5 En appliquant l'algorithme d'Euclide, déterminer le *PGCD* de 770 et 365. En déduire son *PPCM*.
- 6.6 En appliquant l'algorithme d'Euclide, déterminer le *PGCD* de 682 et 787. En déduire son *PPCM*.