# Interrogation 24 d'entrainement
# Applications linéaires I

1. **Restituer le cours.**
   - 1.1 Définir une application linéaire.
   - 1.2 Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.
   - 1.3 Définir et caractériser une projection.
   - 1.4 Définir et caractériser une symétrie.
   - 1.5 Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.
   - 1.6 Définir les termes suivants : isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
   - 1.7 Que dire de l'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ ?
   - 1.8 Quel est l'apéritif préféré de l'algébriste ?

   **Révisions**

   - 1.8 Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
   - 1.9 Définir la somme de deux espaces vectoriels.
   - 1.10 Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
   - 1.11 Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
   - 1.12 Enoncer les deux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme.

2. **Déterminer si une application est linéaire.**
   - 2.1 L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P'' - 5P + 7 \end{array}$ est-elle linéaire ?
   - 2.2 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. L'application $\tau : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \tau(f) : (t \mapsto f(t+a)) \end{array}$ est-elle linéaire ?
   - 2.3 L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+x^2)}{2} \end{array}$ est-elle linéaire ?
   - 2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (AMB)^T \end{array}$ est-elle linéaire ?
   - 2.5 Soit $B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ un polynôme non nul. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\varphi(P)$ le reste dans la division euclidienne de $P$ par $B$. L'application $\varphi$ est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ ?

3. **Calculer un noyau.**
   - 3.1 Déterminer le noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 2x - y - 2z \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si $f$ est injective.
   - 3.2 Déterminer le noyau de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f'' - 12f' + 18f \end{array}$ et préciser si $f$ est injective.
   - 3.3 Déterminer le noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \\ P & \mapsto & (P', P(0)) \end{array}$ et préciser si $f$ est injective.
   - 3.4 Déterminer le noyau de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : (x \mapsto xf(x)) \end{array}$ et préciser si $\varphi$ est injective.
   - 3.5 Déterminer le noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si $f$ est injective.

4. **Calculer une image.**

 4.1 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0)) \end{array}$ et préciser si $f$ est surjective.

 4.2 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \frac{M+M^T}{2} \end{array}$ et préciser si $f$ est surjective.

 4.3 Déterminer l'image de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ et préciser si $f$ est surjective.

 4.4 Déterminer l'image de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : (t \mapsto \mathrm{e}^t f(t)) \end{array}$ et préciser si $\varphi$ est surjective.

 4.5 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si $f$ est surjective.

5. **Séries numériques à paramètre**

 5.1 Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer suivant les valeurs de $p$ la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(np+3)}$.

 5.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de $\alpha$ la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1+\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} - 1$.

 5.3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de $\alpha$ la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

 On pourra admettre que pour tout $\alpha > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

 5.4 Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de $a$ la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$.

 5.5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de $\alpha$ la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(n)\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.