Correction de l'interrogation 24 d'entrainement
Applications linéaires I

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une fonction de E dans F. On dit que f est linéaire si et seulement si

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x,y) \in E^2, \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

1.2 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

- le noyau de f est défini par
$$\operatorname{Ker}(f) = \{ x \in E \mid f(x) = 0_F \}.$$
- l'image de f est définie par
$$\operatorname{Im}(f) = \{ y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x) \}.$$

1.3 Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. La projection sur F parallèlement à G est l'application

$$p : \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}$$

Dans ce cas $F = \operatorname{Im}(p) = \{ x \in E \mid p(x) = x \} = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(p)$.
De plus, pour $p \in \mathscr{L}(E)$, on a

$$p \text{ projection} \qquad \Leftrightarrow \qquad p \circ p = p.$$

1.4 Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. La symétrie sur F parallèlement à G est l'application

$$s : \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}$$

Dans ce cas $F = \{ x \in E \mid s(x) = x \} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \{ x \in E \mid s(x) = -x \} = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
De plus, pour $s \in \mathscr{L}(E)$, on a

$$s \text{ symétrie} \qquad \Leftrightarrow \qquad s \circ s = \mathrm{Id}_E.$$

1.5 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

- f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

1.6 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{F}(E,F)$.

- On dit que f est un isomorphisme si et seulement si f est linéaire et bijective.
- On dit que f est un endomorphisme si et seulement si f est linéaire et $E = F$.
- On dit que f est un automorphisme si et seulement si f est linéaire, bijective et $E = F$.

1.7 Soit E un espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E est

- stable par composition : pour tout $(f,g) \in \mathrm{GL}(E)^2$, on a $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$.
- stable par inverse : pour tout $f \in \mathrm{GL}(E)$, on a $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

1.8 Les olives dénoyautées mises en rang car on se les injecte sans modération. En même temps, en cas de pépin et avant d'être dans le jus, il vaut quand même mieux s'injecter une olive que de tenter l'inverse : la projection pleine poire dans une olive... Vous auriez l'air pomme. Vous renverriez l'image d'une personne ayant un grain. A propos de fruit, savez-vous que l'algèbre linéaire n'est qu'un jouet des mathématiciens ? En effet classer les problèmes physiques en problèmes linéaires ou problèmes non-linéaires revient à classer l'ensemble des objets de l'univers en deux catégories : les bananes et les non-bananes...

2. **Déterminer si une application est linéaire.**

2.1 Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P'' - 5P + 7 \end{array}$. On observe que $f\left(0_{\mathbb{R}_3[X]}\right) = 7 \neq 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas linéaire.}}$$

2.2 Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\tau(\lambda f + \mu g)(t) = \tau(h)(t) = h(t+a) = (\lambda f + \mu g)(t+a) = \lambda f(t+a) + \mu g(t+a) = \lambda \tau(f)(t) + \mu \tau(g)(t).$$

L'égalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\tau(\lambda f + \mu g) = \lambda \tau(f) + \mu \tau(g)$. Conclusion,

$$\boxed{\tau \text{ est bien linéaire.}}$$

2.3 On observe que $f(-1) = \frac{\ln(2)}{2} = f(1) > 0 > -f(1) = -\frac{\ln(2)}{2}$. Donc $f(-1) \neq -f(1)$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas linéaire.}}$$

2.4 Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$f(M) = (AMB)^T = B^T M^T A^T.$$

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Posons $P = \lambda M + \mu N$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= f(P) \\ &= B^T P^T A^T \\ &= B^T (\lambda M + \mu N)^T A^T \\ &= B^T \left(\lambda M^T + \mu N^T\right) A^T && \text{car la transposée est linéaire} \\ &= \left(\lambda B^T M^T + \mu B^T N^T\right) A^T \\ &= \lambda B^T M^T A^T + \mu B^T N^T A^T \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est linéaire.}}$$

2.5 Montrons que φ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$. On pose Q_1, respectivement Q_2, le quotient dans la division de P_1, respectivement P_2, par B et on pose R_1, respectivement R_2, le reste dans la division de P_1, respectivement P_2, par B. On a alors

$$\begin{aligned} P_1 &= BQ_1 + R_1 && \text{avec} \quad \deg(R_1) < \deg(B) \\ P_2 &= BQ_2 + R_2 && \text{avec} \quad \deg(R_2) < \deg(B). \end{aligned}$$

Donc on en déduit que

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = B(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda R_1 + \mu R_2 \qquad (\bigstar)$$

Posons $R = \lambda R_1 + \mu R_2$. On a alors $\deg(R) \leqslant \max(\deg(\lambda R_1), \deg(\mu R_2))$. Or

$$\deg(\lambda R_1) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \lambda = 0 \\ \deg(R_1) & \text{si} \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Donc dans tous les cas, $\deg(\lambda R_1) \leqslant \deg(R_1)$ et de même $\deg(\mu R_2) \leqslant \deg(R_2)$. Par conséquent, $\deg(R) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \leqslant \deg(B)$. Donc par $(\bigstar)$ et l'unicité du reste dans la division euclidienne, on en déduit que R est le reste dans la division euclidienne de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par B. Ainsi, par définition de φ, on en déduit que

$$\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = R = \lambda R_1 + \mu R_2 = \lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$$

Si ce résultat vous surprend, c'est probablement parce qu'il n'est pas vrai pour la division pour les entiers. Par exemple si $n = 3$ et $m = 4$. Dans la division euclidienne de m et n par 5 les restes sont 3 et 4 respectivement. Pourtant le reste de $n + m$ par 5 n'est pas $3 + 4 = 7$ mais 2 !

3. **Calculer un noyau.**

3.1 Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in \operatorname{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^2}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2y+z\\ 2x-y-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=0\\ 2x-y-2z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=0\\ 3y-4z=0\end{cases} \qquad L_2\leftarrow L_2-2L_1\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-z\\ y=\frac{4}{3}z\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{3}z-z=\frac{5}{3}z\\ y=\frac{4}{3}z\end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f)=\left\{\frac{z}{3}\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ z\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\right).}$$

En particulier, $\operatorname{Ker}(f)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

3.2 Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f\in\operatorname{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(f)=0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} &\Leftrightarrow 2f''-12f'+18f=0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\\
&\Leftrightarrow f''-6f'+9f=0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \qquad (\mathscr{E}).
\end{aligned}$$

On reconnait une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. Soit $(\mathscr{E}_c)$: $0=r^2-6r+9=(r-3)^2$ l'équation caractéristique associée. Cette équation admet une unique racine double. Ainsi l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ est donné par

$$\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&(Ax+B)\,\mathrm{e}^{3x}\end{array}\ \middle|\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\mathrm{e}^{3x}\end{array},\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x\,\mathrm{e}^{3x}\end{array}\right).}$$

En particulier $\operatorname{Ker}(f)\neq\left\{0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R})}\right\}$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

3.3 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. On a

$$\begin{aligned}
P\in\operatorname{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(P)=0_{\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}}\\
&\Leftrightarrow (P',P(0))=\left(0_{\mathbb{R}[X]},0_{\mathbb{R}}\right)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}P'=0\\ P(0)=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\exists C\in\mathbb{R}, P=C\\ P(0)=C=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow P=0_{\mathbb{R}[X]}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f)=\left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\} \qquad \text{et} \qquad f \text{ est injective.}}$$

3.4 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(f) = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad xf(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = 0. \end{aligned}$$

Or la fonction f est continue donc si $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$, par passage à la limite,

$$0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = f(0).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. La réciproque étant également vraie, on en déduit que

$$f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R})}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \left\{0_{\mathscr{C}(\mathbb{R})}\right\} \quad \text{et} \quad \varphi \text{ est injective.}}$$

3.5 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$f(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(M) = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b = 0 \\ c+d = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -a \\ d = -c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,c) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right).}$$

On note que les deux matrices ne sont pas colinéaires et donc forment une famille libre.

En particulier $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0_2\}$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

4. **Calculer une image.**

4.1 On sait que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base et donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$. Dès lors, par linéarité de f :

$$\operatorname{Im}(f) = f\left(\operatorname{Vect}(1, X, X^2, X^3)\right) = \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X), f\left(X^2\right), f\left(X^3\right)\right).$$

Si $P=1$, $P(0)=1$ et $P'(0)=P''(0)=P'''(0)=0$ donc $f(1)=(1,0,0,0)$. De la même façon, on a $f(X)=(0,1,0,0)$, $f\left(X^2\right)=(0,0,2,0)$ et $f\left(X^3\right)=(0,0,0,6)$. Donc

$$\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\6\end{bmatrix}\right)}_{\mathscr{B}}.$$

Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ tels que

$$\lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}0\\0\\0\\6\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^4}.$$

Alors, $\begin{cases}\lambda_1=0\\\lambda_2=0\\2\,\lambda_3=0\\6\,\lambda_4=0\end{cases}$ et donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. La famille $\mathscr{B}$ est donc est libre. De plus $\operatorname{Card}(\mathscr{B})=4=\dim\left(\mathbb{R}^4\right)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et est donc génératrice. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}(\mathscr{B})=\mathbb{R}^4\qquad\text{et}\qquad f\text{ est surjective.}}$$

4.2 La famille $\mathscr{C}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc est génératrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc par linéarité de f :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f)=f(\operatorname{Vect}(\mathscr{C}))&=\operatorname{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right),f\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right),f\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right),f\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right)\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\frac12\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\frac12\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\frac12\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\qquad\text{on enlève }C_3\text{ car }C_3=C_2\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\qquad C_2\leftarrow 2C_2\ .\end{aligned}$$

On reconnait alors $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(f)=\mathscr{S}_2(\mathbb{R})\,.}$$

Or toutes les matrices ne sont pas symétriques (par exemple $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\notin\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$) donc $\operatorname{Im}(f)\neq\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\boxed{f\text{ n'est pas surjective}}$.

4.3 Montrons que $\operatorname{Im}(\varphi)=\mathbb{R}$. Par construction de φ, on a

$$\operatorname{Im}(\varphi)\subseteq\mathbb{R}.$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $a\in\mathbb{R}$. Posons $f_a:\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\x\mapsto a\end{array}$. Alors, on a

$$\varphi(f_a)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 a\,\mathrm{d}t=a.$$

Donc f_a est un antécédent de a par φ et donc $a\in\operatorname{Im}(f)$. Ainsi $\mathbb{R}\subseteq\operatorname{Im}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(\varphi)=\mathbb{R}\qquad\text{et}\qquad f\text{ est surjective.}}$$

4.4 Montrons ici encore que φ est surjective. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors $\varphi(f)$ est aussi une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (car l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$). Donc $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Posons $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t} g(t) \end{array}$. Alors on observe que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(f)(t) = \mathrm{e}^{t}\left(\mathrm{e}^{-t} g(t)\right) = g(t).$$

Donc $\varphi(f) = g$ et ainsi $g \in \operatorname{Im}(\varphi)$. D'où $\mathscr{C}(\mathbb{R}) \subseteq \operatorname{Im}(\varphi)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(\varphi) = \mathscr{C}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \varphi \text{ est surjective.}}$$

4.5 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$f(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\
&= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{car} \quad \begin{array}{l} C_2 = C_1 \\ C_4 = C_3 \end{array}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).}$$

De plus, $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \leqslant \operatorname{Card}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2 < 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Donc $\operatorname{Im}(f) \neq \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

« La dimension, c'est béton. »

5. **Séries numériques à paramètre**

5.1 Soit $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n(np+3)}$.

- Premier cas : $p = 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{3n}.$$

  Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est à un coefficient près la série harmonique donc diverge.

- Second cas : $p \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{pn^2}.$$

  De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{pn^2} > 0$. Donc les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pn^2}$ sont de même nature. Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pn^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc, dans ce cas, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(pn+3)} \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad p \neq 0.}$$

5.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} - 1$. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n^\alpha \ln\left(1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{n^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{n^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{n^\alpha\left(\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)+o\left(\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{n^\alpha\left(\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{1}{2n^{3-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right)} - 1. \end{aligned}$$

Premier cas : $\alpha > 3$, alors $3-\alpha<0$ et donc $\frac{1}{2n^{3-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par suite $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement.

Deuxième cas : $\alpha = 3$, alors $\frac{1}{2n^{3-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right) = \frac{1}{2}+o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{e}-1 \neq 0$ et donc à nouveau $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement.

Troisième cas : $\alpha < 3$. Posons $a = 3-\alpha$. On a $a>0$. Alors, en posant pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{2n^a}+o\left(\frac{1}{n^a}\right)$, on a $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus $e^v \underset{v\to 0}{=} 1+v+o(v)$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1+v_n+o(v_n)-1 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} v_n+o(v_n) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^a}+o\left(\frac{1}{n^a}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^a}. \end{aligned}$$

De plus pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^a}>0$ et donc les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n^a}$ sont de même nature. Or en tant que série de Riemann, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n^a} \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad a>1 \quad\Leftrightarrow\quad 3-\alpha>1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha<2.$$

Donc si $\alpha<2$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et si $2\leqslant\alpha<3$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\left(1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}-1\right) \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha<2.}$$

5.3 Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Posons pour tout $n\geqslant 2$, $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

- Si $\alpha<0$, alors $\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et pour n assez grand, on aura $1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}<0$. Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas définie.
- Si $\alpha=0$ alors, pour tout $n\geqslant 1$, $\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\alpha} = -1$ et donc u_{2n+1} n'existe pas. Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas définie.
- Si $\alpha>0$, alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2+o\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Posons pour tout $n \geqslant 2$, $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}.$$

De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $-\frac{1}{2n^{2\alpha}} < 0$. Donc $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ sont de même nature. Or en tant que série de Riemann, on sait que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{1}{2n^{2\alpha}} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

D'autre part, on admet que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. Donc si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors $\sum_{n\geqslant 2} u_n = \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes. Enfin si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, alors $\sum_{n\geqslant 2} u_n = \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \sum_{n\geqslant 2} v_n$ diverge en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Conclusion, la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ existe si et seulement si $\alpha > 0$ et

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \frac{1}{2}.}$$

5.4 Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}}$.

- Premier cas : $a \in]-1;1[$, alors $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n.$$

(encore vrai si $a = 0$ car dans ce cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.) Donc

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a|^n.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a|^n \geqslant 0$. Donc les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a|^n$ sont de même nature. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a|^n$ converge en tant que série géométrique de raison $|a| \in]-1;1[$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Or la converge absolue implique la convergence donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

- Deuxième cas : $a \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, alors $a^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{a^{2n}} = \frac{1}{a^n}.$$

Donc

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{|a|^n}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{|a|^n} > 0$. Donc les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a|^n}$ sont de même nature. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a|^n}$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{|a|} \in]-1;1[$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Or la converge absolue implique la convergence donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

- Troisième cas : $a=-1$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{(-1)^n}{2}$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Dans ce cas $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.
- Quatrième cas : $a=1$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{1}{2}$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Dans ce cas aussi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a^n}{1+a^{2n}} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\,.}$$

5.5 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\ln(n)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

- Si $\alpha<0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. Dans ce cas, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\ln(n)\operatorname{sh}(1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ diverge encore grossièrement.
- Si $\alpha>0$, alors $\frac{1}{n^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc
$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(n)}{n^\alpha}.$$
De plus pour tout $n\geqslant 1$, $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\geqslant 0$. Donc les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ sont de même nature.

  Premier sous-cas : si $\alpha>1$. Posons $\beta=\frac{\alpha-1}{2}$. Alors par croissance comparée,
$$\ln(n)\underset{n\to+\infty}{\ll}n^\beta.$$
Donc
$$\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{n^\beta}{n^\alpha}\right)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\right)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right).$$
Or $\alpha>1$ implique que $\frac{\alpha+1}{2}>1$ et donc $\sum n\in\mathbb{N}^*\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ converge absolument en tant que série de Riemann d'exposant $\frac{\alpha+1}{2}>1$. Donc $\sum n\in\mathbb{N}^*\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ converge aussi absolument et donc converge (étant de signe positif de toute façon). Ainsi dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ converge.

  Second sous-cas : si $\alpha\leqslant 1$. Alors, on a pour tout $n\geqslant 3$, $\ln(n)\geqslant\ln(\mathrm{e})=1$ et donc
$$0\leqslant\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\frac{\ln(n)}{n^\alpha}.$$
Or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha\leqslant 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries de termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ diverge. Donc dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ diverge.

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln(n)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha>1.}$$