

Interrogation 25 d'entraînement

Applications linéaires II

1. Restituer le cours.

- 1.1 Que dire de l'image d'une famille par une application linéaire ? (Prop II.5)
- 1.2 Caractériser une application linéaire suivant l'image d'une base. (Prop II.6)
- 1.3 Comparer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée suivant la nature de l'application linéaire.
- 1.4 Définir le rang.
- 1.5 Énoncer le théorème du rang.
- 1.6 Caractériser les isomorphismes en dimension finie.
- 1.7 Pourquoi le narcissisme entraîne l'égoïsme ? (Vous avez 4h.)

Révisions

- 1.8 Définir et caractériser une famille libre.
- 1.9 Définir et caractériser une famille liée.
- 1.10 Définir une famille génératrice.
- 1.11 Définir et caractériser une base.
- 1.12 Énoncer le théorème de la base adaptée.

2. Appliquer le théorème du rang.

- 2.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de Tr .
- 2.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}_{2n}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$$P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^n a_{2k} X^k$$
. On admet que f est bien définie et linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f .
- 2.3 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 $M \mapsto AM - MA$. On admet que f est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f .
- 2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension du noyau de f ?
- 2.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{kt}$. On définit dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. On admet que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F . On pose enfin

$$\begin{aligned} \varphi : F &\rightarrow F \\ f &\mapsto f'' - 7f' + 10f. \end{aligned}$$

On admet que φ est bien définie et est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de φ .

3. Appliquer la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

3.1 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(X) = AX$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un automorphisme.

3.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \\ x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n \\ x_n \end{bmatrix}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un automorphisme.

3.3 Dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $E = \text{Vect}(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$. On admet que $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ forme une base de E . On définit également $\varphi : E \rightarrow E$ par $\varphi(f) = f'$. On admet que φ est bien définie. Montrer que φ est un automorphisme.

3.4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(a, b) = a + bj$, où on rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.

3.5 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $f(P) = (P(1), P'(1), P''(1), \dots, P^{(n)}(1))$. On admet que f est bien définie et linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.

4. Manipulation théorique des applications linéaires.

4.1 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g)$.

4.2 Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \{0_E\}$.

4.3 Soient E un espace vectoriel et u un projecteur de E . Montrer que $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$.

4.4 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $g \circ f = \text{Id}_E$. Montrer que $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

4.5 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g(\text{Ker}(f)) \subseteq \text{Ker}(f)$.

5. En vrac (et un peu plus dur)

5.1 Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $f \in \text{GL}(E)$, que $p = 3\text{Id}_E - f$ et $q = f - 2\text{Id}_E$ sont des projecteurs et que leurs noyaux sont en somme directe.

5.2 Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$. Montrer que $f \in \text{GL}(E)$. Que dire de f^4 ? Montrer que pour tout $u \in E \setminus \{0_E\}$, $(u, f(u))$ est libre.

5.3 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$.

5.4 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = f$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$.

5.5 Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que $g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$.