Interrogation 26 d'entrainement
Intégration

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Enoncer le théorème de Weierstrass.
   1.2 Enoncer la propriété de séparation de l'intégrale.
   1.3 Enoncer l'inégalité triangulaire.
   1.4 Enoncer l'inégalité de la moyenne.
   1.5 Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
   1.6 Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
   1.7 Pourquoi appelle-t-on un trois demis, un trois demis et un cinq demis, un cinq demis ?

   Révisions

   1.8 Définir la divergence grossière. Si la série converge, que dire de son terme général ? Donner un contre-exemple à la réciproque.
   1.9 Enoncer le théorème sur les séries de Riemann.
   1.10 Enoncer le théorème de comparaison.
   1.11 Enoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.
   1.12 Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?

2. **Encadrer une intégrale.**
   2.1 Soit $a > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{e}^{-t^n}\cos\left(\sqrt{t}\right)\ln(t)}{1+2t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   2.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
   2.3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_n^{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}}\, t^5\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
   2.4 Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}([0;a])$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^a \arctan\left(\mathrm{e}^{nt}+2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt}+3\right) f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   2.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

3. **Sommes de Riemann.**
   3.1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.
   3.2 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.
   3.3 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.
   3.4 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2}$.
   3.5 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

4. **Théorème fondamental de l'analyse.**

   4.1 Justifier que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{tx} \arccos(tx)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[-1;0[\cup]0;1]$ et donner une expression de sa dérivée.
   Bonus : montrer que φ est définie mais pas continue 0.

   4.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}([0;1])$. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 (1+tx)^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de $\varphi'(0)$.

   4.3 Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{x+1}^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée.

   4.4 Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \ln\left(\displaystyle\int_0^{3x} \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)\,\mathrm{d}t\right)$ et donner une expression de sa dérivée.

   4.5 Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_2^3 (tx)^{tx}\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée en fonction de φ.

5. **Inégalité de Taylor-Lagrange**

   5.1 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}_+$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{\mathrm{e}^{2x}(2x)^{n+1}}{(n+1)!}$.

   5.2 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $f : t \mapsto \cos(t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}_+$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   5.3 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction $f : t \mapsto \tan(t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{8x^3}{3}$.

   5.4 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ aux points $a = 0$ et $b = x \in [0;+\infty[$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par x^{n+1}.

   5.5 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $f : t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ aux points $0 < a < b$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\mathrm{sh}(b)\frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.