

## Interrogation 27 d'entraînement Probabilités

### 1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir une probabilité et une variable aléatoire réelle.
- 1.2 Définir un système complet d'événements et une distribution de probabilité.
- 1.3 Définir les trois lois usuelles.
- 1.4 Énoncer la formule des probabilités composées.
- 1.5 Énoncer la formule des probabilités totales.
- 1.6 Énoncer la formule de Bayes.
- 1.7 Définir et caractériser l'indépendance de deux événements.
- 1.8 Définir les deux types d'indépendance pour une famille d'événements.
- 1.9 Pourquoi l'un d'entre vous aura un jour la médaille Fields ?

### Révisions

- 1.8 Énoncer le théorème de la base extraite.
- 1.9 Énoncer le théorème de la base incomplète.
- 1.10 Caractériser par la dimension le fait qu'une famille soit une base.
- 1.11 Caractériser par la dimension le fait que deux sous-espaces vectoriels soient égaux.
- 1.12 Caractériser par le rang le fait qu'une famille soit génératrice/libre/base.
- 1.13 Énoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.

### 2. Utiliser la formule de Bayes.

- 2.1 Dans une population 80% des individus aiment les maths, 30% aiment le rugby et parmi ceux qui aiment le rugby, 40% aiment aussi les maths. Quelle est la probabilité qu'un individu aime le rugby sachant qu'il aime les maths ?
- 2.2 On tire sans remise deux cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un roi au premier tirage sachant que l'on a obtenu un roi au second tirage ?
- 2.3 On lance deux dés à 6 faces, l'un rouge et l'autre vert. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 avec le dé vert sachant que la somme des deux dés fait 7 ?
- 2.4 Une compagnie d'assurance catégorise ses assurés en trois : 10% sont considérés très bons conducteurs, 20% sont considérés bons conducteurs et 70% sont considérés conducteurs normaux. Durant une période donnée, les très bons conducteurs ont une probabilité de 5% d'avoir un accident, les bons conducteurs de 10% et les normaux 50%. Un assuré a eu un accident. Quelle est la probabilité que ce soit un très bon conducteur ?
- 2.5 Diego vient au lycée ou en skate (deux fois sur trois) ou en voiture de sport (une fois sur quatre) ou avec son dromadaire de guerre (une fois sur douze, c'est rapide mais toujours compliqué à garer). Lorsqu'il vient en skate, il n'arrive en retard en classe qu'une fois sur dix (quitte à se fatiguer à pousser autant arriver à l'heure). Cependant, lorsqu'il vient en voiture de sport il arrive une fois sur 5 en retard (on peut bien en profiter pour draguer un peu en chemin). Enfin à dos de son dromadaire de guerre il arrive en retard une fois sur dix (ça dépend surtout de la circulation sur la quatre voies). Sachant que Diego est à l'heure en cours (l'exactitude est la politesse des rois) quelle est la probabilité que son dromadaire ait galopé ?

### 3. Formule des probabilités totales.

- 3.1 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 40% préfère le rugby et 15% le basket. Parmi ceux qui aiment le rugby, 10% le pratique. Parmi ceux qui aiment le basket, 85% le pratique et parmi ceux qui aiment le foot, 90% n'y jouent pas. Sachant qu'un individu pratique au plus un sport et que ce sport, s'il est pratiqué, est nécessairement celui qu'il préfère, quelle est la probabilité qu'un individu pratique l'un de ces trois sports ?
- 3.2 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 20% choisissent le foot et 25% choisissent le basket. Parmi ceux qui préfèrent le foot, 15% aiment les maths. Parmi ceux qui préfèrent le rugby, 55% aiment les maths et enfin parmi ceux qui préfèrent le basket, 45% n'aiment pas les maths. Sachant qu'un individu aime les maths, quelle est la probabilité qu'il préfère le rugby ?

- 3.3 Une urne contient 4 boules rouges, 6 boules bleues et 5 boules vertes. On tire de façon équiprobable une boule. Si la boule est rouge on lance un dé à 4 faces (tétraèdre) si la boule est bleue, on lance un dé à six faces (un cube) et si la boule est verte on lance un dé à 8 faces (octaèdre). Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit 4 ?
- 3.4 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 60% des individus préfèrent le rugby et 10% préfère le basket. Parmi ceux qui choisissent le rugby, 40% n'aiment pas les maths. Parmi ceux qui choisissent le basket, 85% aiment les maths et enfin parmi ceux qui préfèrent le foot, 25% n'aiment pas les maths. Quelle est la probabilité qu'un individu aime les maths ?
- 3.5 On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Si l'on obtient un pique, on lance un dé à 8 faces (octaèdre), si l'on obtient un roi (sauf le roi de pique), on lance un dé à 12 faces (dodécaèdre), sinon, on lance un dé à 20 faces (icosaèdre). Quelle est la probabilité d'avoir tiré un pique sachant que le résultat du dé est égal à 1 ?

#### 4. Formule des probabilités composées.

- 4.1 Dans une population, parmi ceux qui aiment les maths et le rugby, 90% aiment le chocolat. Parmi ceux qui aiment les maths, 25% n'aiment pas le rugby. Enfin 2 individus sur 10 aiment les maths. Quelle est la probabilité qu'un individu aime les maths, le rugby et le chocolat ?
- 4.2 On tire sans remise trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre un trèfle puis un carreau puis encore un trèfle ?
- 4.3 On tire à trois reprises sans remise dans une urne contenant 5 boules rouges, 3 boules blanches et 7 boules bleues. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre une boule bleue, une boule blanche et une boule rouge ?
- 4.4 Le gardien de prison de l'arène dans laquelle est retenu Astérix possède  $n$  clés. Il les essaye une à une pour ouvrir la cellule (sans réessayer deux fois la même clé). Quelle est la probabilité d'obtenir la bonne clé à l'étape  $k$  ?
- 4.5 On dispose de trois boules blanches et trois boules noires dans une urne. On tire successivement et sans remise une boule jusqu'à que l'urne ne possède plus que des boules de la même couleur. Quelle est la probabilité de n'effectuer que trois tirages ?

#### 5. Indépendance.

- 5.1 Dans une population 60% des individus aiment les maths. On sait également que 45% aiment le rugby ou n'aiment pas les maths et que 65% aiment les maths ou aiment le rugby. La probabilité d'aimer les maths est-elle indépendante d'aimer le rugby ?
- 5.2 Dans une population, 4 personnes sur 10 aiment les maths et 3 personnes sur 10 n'aiment ni le rugby ni les maths. Sachant que 2 personnes sur 10 aiment les maths mais pas le rugby, aimer les maths est-il indépendant du fait d'aimer le rugby ?
- 5.3 Dans une population, une personne sur 6 est blonde. Parmi les personnes blondes, 2 personnes sur 3 ont les yeux bleus. Enfin 13 personnes sur 18 ont ou les yeux bleus ou les cheveux blonds. Le caractère blond est-il indépendant du caractère avoir les yeux bleus ?
- 5.4 On lance trois pièces équilibrées et indépendantes les unes des autres et numérotées de 1 à 3. La probabilité que les trois pièces tombent du même côté est-il indépendant du fait que la pièce 1 soit tombée du côté pile ?
- 5.5 On dispose de 6 boules noires, 2 boules blanches et 4 boules rouges. Toutes les boules sont discernables. On pioche simultanément 4 boules parmi ces 12 boules. Les événements « obtenir 2 boules blanches » et « obtenir 2 boules rouges » sont-ils indépendants ?