Correction de l'interrogation 27 d'entrainement Probabilités

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soit Ω un ensemble fini. On dit que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω si

(i) $\mathbb{P}$ est une application définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $[0;1]$,

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(iii) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ vérifiant $A \cap B = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire toute fonction sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.2 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ une famille d'évènements. On dit que $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ forme une système complet d'évènements (incompatibles) si et seulement si

- $\displaystyle\bigcup_{i \in [\![1;p]\!]} A_i = \Omega$,
- $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(p_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in \mathbb{R}^p$. On dit que $(p_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est une distribution de probabilité si et seulement si

- $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $p_i \in [0;1]$,
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} p_i = 1$.

1.3 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$. On note $X \sim \mathscr{U}([\![1;n]\!])$.
- Soit $p \in [0;1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$. On note $X \sim \mathscr{B}(p)$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p si $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

1.4 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $(A_i)_{i \in [\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ une famille d'évènements.

$$\mathbb{P}(A_p \cap \cdots \cap A_1) = \mathbb{P}(A_p \mid A_{p-1} \cap \cdots \cap A_1)\, \mathbb{P}(A_{p-1} \mid A_{p-2} \cap \cdots \cap A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\, \mathbb{P}(A_1).$$

1.5 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(B_k)_{k \in [\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ un système complet d'évènements. Alors pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_k)\, \mathbb{P}(B_k).$$

1.6 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors,

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\, \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

1.7 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. On dit que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$$

ou encore lorsque $\mathbb{P}(B) \neq 0$, si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

1.8 Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $(A_i)_{i \in [\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$.

i. On dit que les $(A_i)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ sont indépendants deux à deux si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j, \qquad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$

ii. On dit que les $(A_i)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ sont indépendants si et seulement si

$$\forall J \subseteq [\![1;p]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i).$$

1.9 Il est encore beaucoup trop tôt pour savoir si vous allez vous transformer en génie des mathématiques ou non (vous êtes encore trop jeunes, vous savez à peine parler quelques mots de mathématiques). Donc les deux possibilités, obtenir la médaille Fields ou ne pas obtenir la médaille Fields, sont en ce qui concerne chacun d'entre vous équiprobables. Dès lors, la probabilité qu'aucun d'entre vous n'obtienne la médaille Fields est de

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{17}}.$$

C'est-à-dire tellement faible que l'on peut estimer très raisonnablement que l'un d'entre vous aura la médaille Fields. Ce qui fera de moi de façon presque sûr l'enseignant d'une médaille Fields et ça c'est la classe ! !

Le même raisonnement peut s'appliquer sur le fait que l'un d'entre vous sera la première personne sur Mars ou le premier Président de l'Union Européenne ou l'inventeur de la théorie du tout... Quel avenir prometteur pour notre promo !

Des petits malins souligneront que, puisque l'on a calculé le produit, le modèle suppose que l'évènement « l'étudiant A décroche la médaille Fields » est indépendant de l'évènement « l'étudiant B décroche la médaille Fields ». Cette indépendance signifie donc que votre merveilleux enseignant n'a aucune part dans ces futurs succès... Finalement il n'est en effet pas si bon que cela ce modèle.

2. **Utiliser la formule de Bayes.**

2.1 Soient A l'évènement « l'individu aime les maths » et B l'évènement « l'individu aime le rugby ». D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}$ et $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{4}{10}$. On cherche $\mathbb{P}(B \mid A)$. On note que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ donc directement, par la formule de Bayes,

$$\boxed{\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{4}{10}\frac{3}{10}\frac{10}{8} = \frac{3}{20}.}$$

2.2 Soient pour tout $i \in \{1;2\}$, R_i l'évènement « obtenir un roi au tirage i ». On cherche $\mathbb{P}(R_1 \mid R_2)$. Puisque le jeu contient plus que deux rois, on a $\mathbb{P}(R_2) \neq 0$. Donc par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(R_1 \mid R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2 \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2)}.$$

De plus $\left(R_1, \overline{R_1}\right)$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_2 \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}\left(R_2 \mid \overline{R_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{R_1}\right)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(R_1 \mid R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2 \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2 \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}\left(R_2 \mid \overline{R_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{R_1}\right)}.$$

Au premier tirage, on a 4 rois parmi les 52 cartes. Donc $\mathbb{P}(R_1) = \frac{4}{52}$. Puis si l'on a tiré un roi au premier tirage, le tirage est sans remise, donc il en reste 3 parmi les 51 cartes restantes du jeu, donc $\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{3}{51}$. Inversement, si l'on n'a pas tiré un roi au premier tirage, on a 4 chances sur les 51 cartes restantes de tirer un roi au second tirage. Donc $\mathbb{P}\left(R_2 \mid \overline{R_1}\right) = \frac{4}{51}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \mid R_2) = \frac{\frac{3}{51}\frac{4}{52}}{\frac{3}{51}\frac{4}{52} + \frac{4}{51}\frac{48}{52}} = \frac{3}{3+48} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}.}$$

2.3 Pour tout $i \in [\![1;6]\!]$, on pose A_i l'évènement « le résultat du dé vert est i » et B l'évènement « la somme des deux dés vaut 7 ». On cherche $\mathbb{P}(A_4 \mid B)$. On a bien $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Donc par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(A_4 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_4)\,\mathbb{P}(A_4)}{\mathbb{P}(B)}.$$

La famille $(A_i)_{i\in[\![1;6]\!]}$ forme un système complet d'évènements non négligeables donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(B \mid A_i)\, \mathbb{P}(A_i).$$

Si A_1 est réalisé, alors le dé vert vaut 1 et donc pour que la somme des deux dés vaille 7 il faut nécessairement que le dé rouge soit égal à 6, ce qui se produit exactement une fois sur 6 : $\mathbb{P}(B \mid A_1) = \frac{1}{6}$ car le dé est équilibré et donc les probabilités sont uniformes. On note B_i l'évènement « le résultat du dé rouge est i », on a de la même façon, par indépendance des deux dés, pour tout $i \in [\![1;6]\!]$,

$$\mathbb{P}(B \mid A_i) = \mathbb{P}(B_{7-i} \mid A_i) = \mathbb{P}(B_{7-i}) = \frac{1}{6}.$$

NB : notez que cela a un sens car $7 - i \in [\![1;6]\!]$.
Donc

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_4 \mid B) = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}.}$$

En particulier $\mathbb{P}(A_4 \mid B) = \mathbb{P}(A_4)$ *et donc* A_4 *et* B *sont indépendants.*

2.4 Notons TB : « être un très bon conducteur », B : « être un bon conducteur », C : « être un conducteur normal » et A : « avoir eu un accident ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(TB) = 0,1 \qquad \mathbb{P}(B) = 0,2 \qquad \mathbb{P}(C) = 0,7$$
$$\mathbb{P}(A \mid TB) = 0,05 \qquad \mathbb{P}(A \mid B) = 0,1 \qquad \mathbb{P}(A \mid C) = 0,5.$$

On cherche $\mathbb{P}(TB \mid A)$. Puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(TB \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid TB)\,\mathbb{P}(TB)}{\mathbb{P}(A)}.$$

De plus, (TB, B, C) forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid TB)\,\mathbb{P}(TB) + \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid C)\,\mathbb{P}(C).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(TB \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(A \mid TB)\,\mathbb{P}(TB)}{\mathbb{P}(A \mid TB)\,\mathbb{P}(TB) + \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid C)\,\mathbb{P}(C)}\\ &= \frac{0,05 \times 0,1}{0,05 \times 0,1 + 0,2 \times 0,1 + 0,5 \times 0,7}\\ &= \frac{0,5}{0,5 + 2 + 35}\\ &= \frac{1}{1 + 4 + 70}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(TB \mid A) = \frac{1}{75}.}$$

2.5 Notons S : « Diego vient en skate », V : « Diego vient en voiture », D « Diego vient en dromadaire de guerre » et R « Diego est en retard ». D'après l'énoncé (si peu fictif), on a

$$\mathbb{P}(S) = \frac{2}{3} \qquad \mathbb{P}(V) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(D) = \frac{1}{12}$$
$$\mathbb{P}(R \mid S) = \frac{1}{10} \qquad \mathbb{P}(R \mid V) = \frac{1}{5} \qquad \mathbb{P}(R \mid D) = \frac{1}{10}.$$

On cherche $\mathbb{P}\left(D \mid \overline{R}\right)$. Puisque $\mathbb{P}\left(\overline{R}\right) \neq 0$, on a par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}\left(D \mid \overline{R}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{R} \mid D\right)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}\left(\overline{R}\right)} = \frac{(1-\mathbb{P}(R \mid D))\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}\left(\overline{R}\right)},$$

car $\mathbb{P}_D$ est une probabilité. De plus (S, V, D) forme un système complet d'évènements (Diego n'ayant pas encore reçu son jetpack commandé au père Noël, n'utilise pas d'autre moyen de transport et il refuse de prendre son dromadaire sur le dos quand il vient en skate). Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\left(\overline{R}\right) = 1-\mathbb{P}(R) = 1-\mathbb{P}(R \mid S)\mathbb{P}(S)-\mathbb{P}(R \mid V)\mathbb{P}(V)-\mathbb{P}(R \mid D)\mathbb{P}(D).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(D \mid \overline{R}\right) &= \frac{(1-\mathbb{P}(R \mid D))\mathbb{P}(D)}{1-\mathbb{P}(R \mid S)\mathbb{P}(S)-\mathbb{P}(R \mid V)\mathbb{P}(V)-\mathbb{P}(R \mid D)\mathbb{P}(D)}\\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{10}\right)\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{10}\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\frac{1}{12}}\\ &= \frac{9}{120-8-6-1} = \frac{9}{105} = \frac{3}{35}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(D \mid \overline{R}\right) = \frac{3}{35}.}$$

3. **Formule des probabilités totales.**

3.1 On note F l'évènement « l'individu préfère le foot », R l'évènement « l'individu préfère le rugby », B l'évènement « l'individu préfère le basket » et enfin A l'évènement « l'individu pratique son sport favori ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(R) = \frac{40}{100}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{15}{100}, \qquad \mathbb{P}(A \mid R) = \frac{10}{100}, \qquad \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{85}{100}, \qquad \mathbb{P}\left(\overline{A} \mid F\right) = \frac{90}{100}$$

et on cherche $\mathbb{P}(A)$. Par hypothèse, (F, R, B) forme un système complet d'évènements (incompatibles), donc $1 = \mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(R)+\mathbb{P}(B)$ i.e.

$$\mathbb{P}(F) = 1-\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(R) = 1-\frac{40}{100}-\frac{15}{100} = \frac{45}{100}.$$

De plus, puisque $\mathbb{P}(F) \neq 0$, $\mathbb{P}_F$ est une probabilité et donc

$$\mathbb{P}(A \mid F) = 1-\mathbb{P}\left(\overline{A} \mid F\right) = 1-\frac{90}{100} = \frac{10}{100}.$$

Rappelons que (F, R, B) forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \mid F)\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(A \mid R)\mathbb{P}(R)+\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)\\ &= \frac{10}{100}\frac{45}{100}+\frac{10}{100}\frac{40}{100}+\frac{85}{100}\frac{15}{100}\\ &= \frac{450+400+850+425}{10000} = \frac{2125}{10000} = \frac{425}{2000} = \frac{85}{400} = \frac{17}{80}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{17}{80}.}$$

3.2 On note F l'évènement « l'individu préfère le foot », R « l'individu préfère le rugby », B « l'individu préfère le basket » et M l'évènement « l'individu aime les maths ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(F) = \frac{20}{100}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{25}{100}, \qquad \mathbb{P}(M \mid F) = \frac{15}{100}, \qquad \mathbb{P}(M \mid R) = \frac{55}{100}, \qquad \mathbb{P}\left(\overline{M} \mid B\right) = \frac{45}{100}.$$

On cherche $\mathbb{P}(R \mid M)$. On a $\mathbb{P}(M) \neq 0$. Et puisque (F, R, B) forme un système complet d'évènements, par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(R \mid M) = \frac{\mathbb{P}(M \mid R)\mathbb{P}(R)}{\mathbb{P}(M \mid F)\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(M \mid R)\mathbb{P}(R)+\mathbb{P}(M \mid B)\mathbb{P}(B)}.$$

Or, comme (F, R, B) forme un système complet d'évènements, $1 = \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(B)$ i.e.

$$\mathbb{P}(R) = 1 - \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{20}{100} - \frac{25}{100} = \frac{55}{100}.$$

De plus, comme $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on sait que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité. Donc,

$$\mathbb{P}(M \mid B) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{M} \mid B\right) = 1 - \frac{45}{100} = \frac{55}{100}.$$

Conclusion,

$$\mathbb{P}(R \mid M) = \frac{\frac{55}{100}\frac{55}{100}}{\frac{15}{100}\frac{20}{100} + \frac{55}{100}\frac{55}{100} + \frac{55}{100}\frac{25}{100}} = \frac{11 \times 11}{3 \times 4 + 11 \times 11 + 11 \times 5} = \frac{121}{12 + 121 + 55} = \frac{121}{188}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(R \mid M) = \frac{121}{188}.}$$

3.3 On pose R « la boule tirée est rouge », B « la boule tirée est bleue », V « la boule tirée est verte » et A « le résultat du dé est 4 ». On cherche $\mathbb{P}(A)$. La famille (R, B, V) forme un systèmes complets d'évènements (incompatibles). Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid V)\mathbb{P}(V).$$

De plus le tirage des boules et celui des dés sont équiprobables. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}\frac{4}{15} + \frac{1}{6}\frac{6}{15} + \frac{1}{8}\frac{5}{15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{5}{120} = \frac{16+5}{120} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{7}{40}.}$$

3.4 Notons F l'évènement « préférer le foot », R l'évènement « préférer le rugby », B l'évènement « préférer le basket » et M l'évènement « aimer les maths ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(R) = 0,6 \qquad \mathbb{P}(B) = 0,1$$
$$\mathbb{P}\left(\overline{M} \mid R\right) = 0,4 \qquad \mathbb{P}(M \mid B) = 0,85 \qquad \mathbb{P}\left(\overline{M} \mid F\right) = 0,25.$$

On cherche $\mathbb{P}(M)$. Les évènements R et F ne sont pas négligeables donc $\mathbb{P}_R$ et $\mathbb{P}_F$ sont des probabilités et

$$\mathbb{P}(M \mid R) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{M} \mid R\right) = 0,6 \qquad \mathbb{P}(M \mid F) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{M} \mid F\right) = 0,75.$$

De plus (F, R, B) forme un système complet d'évènements donc

$$\mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(B) = 1 - 0,6 - 0,1 = 0,3.$$

Puisque (F, R, B) forme un système complet d'évènements, on a par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(M \mid F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(M \mid R)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(M \mid B)\mathbb{P}(B) \\ &= 0,75 \times 0,3 + 0,6 \times 0,6 + 0,85 \times 0,1 = 0,225 + 0,36 + 0,085 = 0,67.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(M) = 0,67.}$$

3.5 On pose P l'évènement « obtenir un pique », R : « obtenir un roi non-pique » et A : « obtenir 1 avec le dé ». On cherche $\mathbb{P}(P \mid A)$. Notons que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Donc par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(P \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(A)}.$$

De plus $\Big(P, R, \underbrace{\overline{P}\cap\overline{R}}_{=\overline{P\sqcup R}}\Big)$ forme un système complet d'évènements (incompatibles) donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \mid P)\,\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(A \mid R)\,\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{P}\cap\overline{R}\right)\mathbb{P}\left(\overline{P}\cap\overline{R}\right)\\
&= \mathbb{P}(A \mid P)\,\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(A \mid R)\,\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{P}\cap\overline{R}\right)(1-\mathbb{P}(P\sqcup R))\\
&= \mathbb{P}(A \mid P)\,\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(A \mid R)\,\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{P}\cap\overline{R}\right)(1-\mathbb{P}(P)-\mathbb{P}(R))\\
&= \frac{1}{8}\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\frac{3}{52} + \frac{1}{20}\left(1-\frac{13}{52}-\frac{3}{52}\right) \qquad \text{car les tirages sont uniformes}\\
&= \frac{1}{52}\left(\frac{13}{8}+\frac{1}{4}+\frac{36}{20}\right)\\
&= \frac{1}{52}\frac{65+10+72}{40} = \frac{147}{52\times 40}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(P \mid A) = \frac{\frac{1}{8}\times\frac{13}{52}}{\frac{147}{52\times 40}} = \frac{65}{147}.}$$

4. **Formule des probabilités composées.**

4.1 On note M l'évènement « l'individu aime les maths », R l'évènement « l'individu aime le rugby » et C l'évènement « l'individu aime le chocolat ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(C \mid R\cap M) = \frac{90}{100}, \qquad \mathbb{P}\left(\overline{R} \mid M\right) = \frac{25}{100}, \qquad \mathbb{P}(M) = \frac{20}{100}.$$

On cherche $\mathbb{P}(C\cap R\cap M)$. Puisque $\mathbb{P}(M)\neq 0$, on sait que $\mathbb{P}_M$ est une probabilité. Donc

$$\mathbb{P}(R \mid M) = 1-\mathbb{P}\left(\overline{R} \mid M\right) = \frac{75}{100}.$$

Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(C\cap R\cap M) = \mathbb{P}(C \mid R\cap M)\,\mathbb{P}(R \mid M)\,\mathbb{P}(M) = \frac{90}{100}\frac{75}{100}\frac{20}{100} = \frac{9\times 150}{10000} = \frac{135}{1000}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(C\cap R\cap M) = 0,135.}$$

4.2 Pour tout $i\in[\![1;3]\!]$, on note T_i l'évènement « obtenir un trèfle au tirage i » et C_i : « obtenir un carreau au tirage i ». On cherche $\mathbb{P}(T_1\cap C_2\cap T_3)$. Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(T_1\cap C_2\cap T_3) = \mathbb{P}(T_3 \mid T_1\cap C_2)\,\mathbb{P}(C_2 \mid T_1)\,\mathbb{P}(T_1).$$

Le tirage est uniforme donc $\mathbb{P}(T_1) = \frac{1}{4}$. Puis sachant que l'on a enlevé un trèfle la probabilité d'obtenir un carreau est donc $\mathbb{P}(C_2 \mid T_1) = \frac{8}{31}$. Enfin si l'on a déjà retiré un trèfle, il n'en reste plus que 7 et si l'on a retiré aussi un carreau, il ne reste plus que 30 cartes. D'où, $\mathbb{P}(T_3 \mid T_1\cap C_2) = \frac{7}{30}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(T_1\cap C_2\cap T_3) = \frac{1}{4}\frac{8}{31}\frac{7}{30} = \frac{7}{31\times 15} = \frac{7}{155\times 3} = \frac{7}{465}.}$$

4.3 Pour tout $i\in[\![1;3]\!]$, on note A_i l'évènement « obtenir une blanche au tirage i », E_i : « obtenir une bleue au tirage i » et R_i : « obtenir une rouge au tirage i ». On cherche $\mathbb{P}(E_1\cap A_2\cap R_3)$. On a par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(E_1\cap A_2\cap R_3) = \mathbb{P}(R_3 \mid E_1\cap A_2)\,\mathbb{P}(A_2 \mid E_1)\,\mathbb{P}(E_1).$$

Or suivant les proportions des boules, comme le tirage est uniforme : $\mathbb{P}(E_1) = \frac{7}{5+3+7} = \frac{7}{15}$. Puis sachant que l'on a retiré une boule bleue, la probabilité d'obtenir une blanche est de $\mathbb{P}(A_2 \mid E_1) = \frac{3}{5+3+6} = \frac{3}{14}$. De même avec une boule blanche et une boule bleue en moins, on a $\mathbb{P}(R_3 \mid E_1\cap A_2) = \frac{5}{5+2+6} = \frac{5}{13}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1\cap A_2\cap R_3) = \frac{7}{15}\frac{3}{14}\frac{5}{13} = \frac{1}{2\times 13} = \frac{1}{26}.}$$

4.4 Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Notons pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, A_i l'évènement « obtenir la bonne clé à l'essai i ». On cherche $\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right)$. Donc par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) = \mathbb{P}\left(A_k \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}\right) \prod_{i=2}^{k-1} \mathbb{P}\left(\overline{A_i} \mid \overline{A_1} \cap \dots \overline{A_{i-1}}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right).$$

S'il a échoué $i-1$ fois, alors il lui reste $n-i+1$ clés dont une seule est la bonne (non précisé dans l'énoncé mais faisons cette hypothèse) et donc $n-i$ sont mauvaise. Ainsi, la probabilité d'échouer à l'étape i sachant qu'il a déjà échoué à toutes les étapes précédentes est

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_i} \mid \overline{A_1} \cap \dots \overline{A_{i-1}}\right) = \frac{n-i}{n-i+1}.$$

De plus au premier tirage, on a $\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) = \frac{n-1}{n}$ (il y a $n-1$ mauvaises clés parmi les n). Enfin s'il a échoué $k-1$ fois sa probabilité de réussir à l'étape k est de

$$\mathbb{P}\left(A_k \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}\right) = \frac{1}{n-k+1}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) = \frac{1}{n-k+1} \prod_{i=2}^{k-1} \left(\frac{n-i}{n-i+1}\right) \times \frac{n-1}{n}.$$

On effectue l'inversion d'indice $j = n - i$:

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) = \frac{1}{n-k+1} \prod_{j=n-k+1}^{n-2} \left(\frac{j}{j+1}\right) \times \frac{n-1}{n}$$

On reconnaît un produit télescopique :

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) = \frac{1}{n-k+1} \left(\frac{n-k+1}{n-2+1}\right) \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) = \frac{1}{n}.}$$

Ce résultat est cohérent au sens où le gardien ayant n clés, le rang d'apparition de la clé est équiprobable sur chaque tirage (elle peut apparaitre autant au premier tirage qu'au dernier tirage).

4.5 Pour tout $k \in [\![1;3]\!]$, on pose B_k l'évènement « obtenir une boule blanche au tirage k » et A l'évènement « ne faire que trois tirages ». Pour qu'à la fin des trois premiers tirages le processus s'arrête, il faut qu'à la fin des trois tirages, il ne reste que des boules d'une même couleur et donc d'avoir enlevé les trois boules de l'autre couleur. Donc ou bien il ne reste que les trois blanches ou bien il ne reste que les trois noires autrement dit ou bien on a pioché les trois noires ou bien on a pioché les trois blanches :

$$A = (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \sqcup \left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}\right).$$

Par la formule des probabilités composées, on a

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2)\, \mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\, \mathbb{P}(B_1).$$

Le tirage étant uniforme, on a $\mathbb{P}(B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Puis si l'on a retiré une blanche, il en reste 2 parmi les 5 boules restantes : $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \frac{2}{5}$ et de la même façon, $\mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{1}{4}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

Or les hypothèses initiales sont symétriques sur les couleurs (on a autant de blanches que de noires et le protocole qui suit est aussi symétrique par rapport aux couleurs). On a donc également

$$\mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}\right) = \frac{1}{20}.$$

Or $(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ et $\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}\right)$ sont deux évènements disjoints. Donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left((B_1 \cap B_2 \cap B_3) \sqcup \left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}\right)\right) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}\right) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{10}.}$$

5. **Indépendance.**

5.1 Posons M l'évènement « aimer les maths », R « aimer le rugby ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(M) = \frac{60}{100} \qquad \mathbb{P}\left(R \cup \overline{M}\right) = \frac{45}{100} \qquad \mathbb{P}(M \cup R) = \frac{65}{100}.$$

On a

$$\overline{R} = \left(\overline{R} \cap M\right) \sqcup \left(\overline{R} \cap \overline{M}\right) = \left(\overline{R \cup \overline{M}}\right) \sqcup \left(\overline{R \cup M}\right).$$

Or l'union est disjointe, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{R}\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\overline{R \cup \overline{M}}\right) \sqcup \left(\overline{R \cup M}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{R \cup \overline{M}}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{R \cup M}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(R \cup \overline{M}\right) + 1 - \mathbb{P}(R \cup M) \\
&= 2 - \frac{45}{100} - \frac{65}{100} = \frac{90}{100}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(R) = 1 - \mathbb{P}(R) = 1 - \frac{90}{100} = \frac{10}{100}.$$

Par la formule de Poincaré (ou formule du crible i.e. la formule de type Grassmann pour les probabilités)

$$\mathbb{P}(M \cap R) = \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(R \cup M) = \frac{60}{100} + \frac{10}{100} - \frac{65}{100} = \frac{5}{100}.$$

D'autre part

$$\mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(R) = \frac{60 \times 10}{100 \times 100} = \frac{6}{100} \neq \frac{5}{100} = \mathbb{P}(M \cap R).$$

Conclusion,

$$\boxed{M \text{ et } R \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

5.2 Posons M l'évènement « aimer les maths », R « aimer le rugby ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(M) = \frac{4}{10} \qquad \mathbb{P}\left(\overline{R} \cap \overline{M}\right) = \frac{3}{10} \qquad \mathbb{P}\left(M \cap \overline{R}\right) = \frac{2}{10}.$$

Puisque $\overline{R} = \left(\overline{R} \cap \overline{M}\right) \sqcup \left(M \cap \overline{R}\right)$ et que l'union est disjointe,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{R}\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\overline{R} \cap \overline{M}\right) \sqcup \left(M \cap \overline{R}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{R} \cap \overline{M}\right) + \mathbb{P}\left(M \cap \overline{R}\right) \\
&= \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}\left(\overline{R}\right) = \frac{4}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \mathbb{P}\left(M \cap \overline{R}\right).$$

Donc M et $\overline{R}$ sont indépendants. Donc par la proposition IV.7,

$$\boxed{M \text{ et } R \text{ sont indépendants.}}$$

5.3 Notons B « être blond » et Y : « avoir les yeux bleus ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{P}(Y \mid B) = \frac{2}{3} \qquad \mathbb{P}(B \cup Y) = \frac{13}{18}.$$

On a

$$\mathbb{P}(Y \cap B) = \mathbb{P}(Y \mid B)\,\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}\frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$

Donc par la formule de Poincaré,

$$\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(B \cup Y) + \mathbb{P}(Y \cap B) - \mathbb{P}(B) = \frac{13}{18} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13+2-3}{18} = \frac{2}{3}.$$

On observe alors que

$$\mathbb{P}(Y \mid B) = \frac{2}{3} = \mathbb{P}(Y).$$

Conclusion,

$$\boxed{B \text{ et } Y \text{ sont indépendants.}}$$

Oui bon c'est un exercice, pas sûr que ce soit génétiquement très pertinent...

5.4 Pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, on note P_i l'évènement « la pièce numéro i tombe sur pile », S : « toutes les pièces sont tombées du même côté ». Pour réaliser S, il faut ou bien que toutes les pièces soient tombées sur pile ou (exclusif ici) que toutes les pièces soient tombées sur face.

$$S = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \sqcup \left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}\right).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}\left((P_1 \cap P_2 \cap P_3) \sqcup \left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + \mathbb{P}\left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}\right) && \text{car l'union est disjointe} \\
&= \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(P_2)\,\mathbb{P}(P_3) + \mathbb{P}\left(\overline{P_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{P_2}\right)\mathbb{P}\left(\overline{P_3}\right) && \text{car les lancers sont indépendants} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} && \text{car les pièces sont équilibrées} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
S \cap P_1 &= \left[(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \sqcup \left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}\right)\right] \cap P_1 \\
&= (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_1) \sqcup \left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3} \cap P_1\right) \\
&= (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \sqcup \emptyset \\
&= P_1 \cap P_2 \cap P_3.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \cap P_1) &= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\
&= \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(P_2)\,\mathbb{P}(P_3) && \text{car les lancers sont indépendants} \\
&= \frac{1}{8} && \text{car les pièces sont équilibrées.}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(S \cap P_1) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(S).$$

Conclusion,

$$\boxed{S \text{ et } P_1 \text{ sont indépendants.}}$$

5.5 Notons B l'évènement « obtenir 2 boules blanches » et R « obtenir 2 boules rouges ». Posons Ω l'ensemble des tirages de 4 boules parmi les 12 possibles i.e. Ω est l'ensemble des combinaisons de 4 parmi 12. Autrement dit Ω est l'ensemble des parties de $[\![1;12]\!]$ qui contiennent 4 éléments :

$$\Omega = \{\omega \in \mathscr{P}([\![1;12]\!]) \mid \mathrm{Card}(\omega) = 4\}.$$

Alors

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{12}{4}.$$

D'autre part, pour construire une issue de B,

- il faut piocher simultanément deux boules blanches parmi les 2 possibles : 1 seul choix
- piocher simultanément deux boules parmi les $6+4=10$ boules non-blanches : $\binom{10}{2}$ choix.

Ainsi, au total on a $\binom{10}{2}$ issues dans B :

$$\text{Card}\,(B) = \binom{10}{2}.$$

Le tirage parmi les combinaisons étant uniforme, on en déduit que

$$\mathbb{P}\,(B) = \frac{\text{Card}\,(B)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{4}}.$$

Pour ceux qui s'intéressent à comprendre plus précisément à quoi correspond B, ce n'est pas à faire dans une copie (vous y perdrez du temps pour rien) mais si on dit que les boules noires sont numérotées de 1 à 6, les blanches de 7 à 8 et les rouges de 9 à 12 alors

$$\begin{aligned} B = \{&\{1,2,7,8\},\{1,3,7,8\},\{1,4,7,8\},\{1,5,7,8\},\{1,6,7,8\},\{1,7,8,9\},\{1,7,8,10\},\{1,7,8,11\},\{1,7,8,12\} \\ &\{2,3,7,8\},\{2,4,7,8\},\{2,5,7,8\},\{2,6,7,8\},\{2,7,8,9\},\{2,7,8,10\},\{2,7,8,11\},\{2,7,8,12\}, \\ &\{3,4,7,8\},\{3,5,7,8\},\{3,6,7,8\},\{3,7,8,9\},\{3,7,8,10\},\{3,7,8,11\},\{3,7,8,12\}, \\ &\{4,5,7,8\},\{4,6,7,8\},\{4,7,8,9\},\{4,7,8,10\},\{4,7,8,11\},\{4,7,8,12\}, \\ &\{5,6,7,8\},\{5,7,8,9\},\{5,7,8,10\},\{5,7,8,11\},\{5,7,8,12\}, \\ &\{6,7,8,9\},\{6,7,8,10\},\{6,7,8,11\},\{6,7,8,12\}, \\ &\{7,8,9,10\},\{7,8,9,11\},\{7,8,9,12\}, \\ &\{7,8,10,11\},\{7,8,10,12\}, \\ &\{7,8,11,12\}\} \end{aligned}$$

Vérifiez alors que Card $(B) = \sum_{k=1}^{9} k = \frac{9\times 10}{2} = 45$ *ce qui correspond bien à*

$$\binom{10}{2} = \frac{(10)!}{2!8!} = \frac{9\times 10}{2} = 45.$$

pour construire une issue de R,

- il faut piocher simultanément deux boules rouges parmi les 4 possibles : $\binom{4}{2}$ choix
- piocher simultanément deux boules parmi les $6+2=8$ boules non-rouges : $\binom{8}{2}$ choix.

Ainsi, au total on a :

$$\text{Card}\,(R) = \binom{4}{2}\binom{8}{2}.$$

Le tirage parmi les combinaisons étant uniforme, on en déduit que

$$\mathbb{P}\,(R) = \frac{\text{Card}\,(R)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{2}}{\binom{12}{4}}.$$

Notons maintenant que $B\cap R$ est réalisé lorsque l'on a pioché 2 rouges et 2 blanches :

- on choisit les deux blanches : une seule façon,
- on choisit les deux rouges parmi les 4 : $\binom{4}{2}$.

Au total,

$$\mathrm{Card}\left(B\cap R\right)=\binom{4}{2}.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(B\cap R\right)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{4}}.$$

On a alors les assertions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(B\cap R\right)=\mathbb{P}\left(R\right)\mathbb{P}\left(B\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{4}}=\frac{\binom{4}{2}\binom{8}{2}}{\binom{12}{4}}\times\frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{4}}\\
&\Leftrightarrow \quad \binom{4}{2}\binom{12}{4}=\binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{10}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4!\times 12!}{2\times 2\times 4!\times 8!}=\frac{4!\times 8!\times 10!}{2\times 2\times 2\times 6!\times 2\times 8!}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{12!}{2\times 2\times 8!}=\frac{4!\times 10!}{2\times 2\times 2\times 2\times 6!}\\
&\Leftrightarrow \quad 1=\frac{4!\times 8!\times 10!}{2\times 2\times 6!\times 12!}\\
&\Leftrightarrow \quad 1=\frac{2\times 3\times 7\times 8}{11\times 12}=\frac{7\times 4}{11}=\frac{28}{11}.
\end{aligned}$$

Or 11 ne divise pas 28. Donc la dernière assertion est fausse et donc

$$\mathbb{P}\left(B\cap R\right)\neq\mathbb{P}\left(R\right)\mathbb{P}\left(B\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{B \text{ et } R \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Miam ! Une bonne petite question comme on les aime.