

## Interrogation 28 d'entraînement Représentation matricielle

### 1. Restituer le cours.

- 1.1 Préciser l'isomorphisme entre les applications linéaires et les matrices. Quelle est la dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$  ?
- 1.2 Énoncer la proposition donnant le vecteur image.
- 1.3 Donner la matrice d'une composition.
- 1.4 Énoncer la caractérisation des bases par la représentation matricielle.
- 1.5 Énoncer la proposition donnant la représentation d'un vecteur dans une nouvelle base.
- 1.6 Caractériser l'inversibilité d'une matrice.
- 1.7 Il ne faut pas confondre ma rage de pastis avec...

### Révisions

- 1.8 Énoncer le théorème fondamental de l'arithmétique.
- 1.9 Caractériser les bijections sur les ensembles finis.
- 1.10 Énoncer la formule de Poincaré. Cas de l'union disjointe ?
- 1.11 A quel type de tirage correspond à  $p$ -uplet ? Un arrangement ? une combinaison ?
- 1.12 Donner le nombre d'applications de  $E$  dans  $F$ . Combien sont injectives ? bijectives ?
- 1.13 Donner la notation pour l'ensemble des parties d'un ensemble. Lorsque  $E$  est fini en donner son cardinal.

### 2. Matrice d'une application linéaire.

- 2.1 On admet que  $\mathcal{B} = (t \mapsto \operatorname{ch}(t), t \mapsto \operatorname{sh}(t), t \mapsto 3)$  forme une base de  $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$ . On pose  $\varphi : E \rightarrow E$ ,  $f \mapsto f' - f(0)$ . On admet que  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . Déterminer sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ .
- 2.2 On pose  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $M \mapsto M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans les bases canoniques.
- 2.3 On pose  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans les bases canoniques.
- 2.4 On pose  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $(x, y) \mapsto (\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x), \operatorname{Re}(y), \operatorname{Im}(y))$  où  $\mathbb{C}^2$  est vu comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Déterminer la matrice de  $f$  dans les bases canoniques.  
Même question lorsque  $\mathbb{C}^2$  est vu comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- 2.5 Déterminer la matrice de  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $M \mapsto M^T$  dans la base canonique.
- 2.6 On pose  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ ,  $(a, b, c, d) \mapsto (2a + b)X^2 + (a - 3b + c)X - 4c$  et  $g : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \mapsto P(2)$ . Déterminer la matrice de  $g \circ f$  dans les bases canoniques.

### 3. Matrice de passage.

- 3.1 Dans  $\mathbb{R}^2$ , on pose  $e_1 = (3, 1)$ ,  $e_2 = (5, 2)$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  et  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  (dans ce sens).
- 3.2 Dans  $\mathbb{R}^2$ , on note  $\mathcal{C} = (e_x, e_y)$  la base canonique et on pose  $e_r = \cos(\theta)e_x + \sin(\theta)e_y$  et  $e_\theta = -\sin(\theta)e_x + \cos(\theta)e_y$ . On fixe  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (e_r, e_\theta)$  est une base et calculer la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .
- 3.3 Dans  $\mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2)$  et  $\mathcal{C}$  la base canonique. Justifier que  $\mathcal{B}$  est une base et déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .
- 3.4 Dans  $\mathbb{R}_1[X]$ , on pose  $\mathcal{B}_1 = (X + 1, X + 2)$  et  $\mathcal{B}_2 = (2X + 1, 3X + 1)$ . Justifier que  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont des bases et déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$ .
- 3.5 Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$  une base de  $E$ . On pose  $\mathcal{B}_1 = (\frac{e_1 + e_2}{2}, \frac{e_1 - e_2}{2})$  ainsi que  $\mathcal{B}_2 = (2e_1 - e_2, e_1 + 3e_2)$ . Justifier que  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont deux bases de  $E$  et déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$ .

#### 4. Formule de changement de base.

4.1 Soient  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$  quatre bases et  $f$  une application linéaire. Calculer  $\text{mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4}(f)$  sachant que

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_3}(\mathcal{B}_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_4) &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}_4}(\mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.2 On considère  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  définie pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = (x - y + 3z, 2y + z)$ . On pose  $\mathcal{B}_3 = ((1, 0, 0), (-1, 1, 0), (1, -3, 2))$ ,  $\mathcal{B}_2 = ((-1, 1), (5, -2))$ ,  $\mathcal{C}_3$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{C}_2$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . On donne  $\text{mat}_{\mathcal{B}_3}(\mathcal{C}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$  et  $\text{mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{C}_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $\text{mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f)$ .

4.3 Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases et  $f$  un endomorphisme. Calculer  $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  sachant que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4 On pose  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé,  $e_1 = (0, 1, 0)$ ,  $e_2 = (1, 0, 1)$ ,  $e_3 = (1, 0, -1)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . On admet que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ ,  $f(e_3)$  et en déduire  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

4.5 Soient  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé. On pose  $e_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 0, 1, 1)$ ,  $e_3 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ . On admet que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ . Calculer  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ ,  $f(e_3)$ ,  $f(e_4)$  et en déduire  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

4.6 Soient  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé. On pose  $e_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0)$  et  $e_3 = (-2, 0, 0)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . On admet que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ ,  $f(e_3)$  et en déduire  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

#### 5. Noyau, image, rang.

5.1 Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Calculer le noyau et le rang de  $f$ .

5.2 Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  canoniquement associé à  $A$ . Déterminer le noyau et le rang de  $f - \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ .

5.3 Soient  $E$  un espace vectoriel,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme tel que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -6 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ . Déterminer le noyau et le rang de  $f - 4\text{Id}_E$ .

5.4 Soient  $E$  un espace vectoriel,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme tel que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Déterminer l'image et le rang de  $f$ .

5.5 Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé. Calculer l'image et le rang de  $f$ .

5.6 Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  canoniquement associé. Calculer l'image et le rang de  $f$ .