

Interrogation 29 d'entraînement

Couple de variables aléatoires

1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$.
- 1.2 Définir l'espérance de X , la variance de X (+formule) et la fonction génératrice de X .
- 1.3 Énoncer le lien entre la fonction génératrice, l'espérance et la variance.
- 1.4 Que dire de l'espérance, la variance et la fonction génératrice de deux variables indépendantes ?
- 1.5 Énoncer le théorème de transfert.
- 1.6 Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- 1.7 Énoncer la propriété sur la somme de deux binomiales.
- 1.8 Pourquoi le/la probabiliste fait un bon époux/épouse ?

Révisions

- 1.9 Définir une application linéaire.
- 1.10 Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.
- 1.11 Définir et caractériser une projection.
- 1.12 Définir et caractériser une symétrie.
- 1.13 Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.
- 1.14 Définir les termes suivants : isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
- 1.15 Que dire de l'ensemble $GL(E)$?

2. Reconnaître une loi usuelle.

- 2.1 On range au hasard 20 chaussettes dans 3 tiroirs. X est le nombre de chaussettes dans le premier tiroir. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X . Quelle est la probabilité que le premier tiroir soit vide ?
- 2.2 On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as cœur. X est le nombre de cartes que l'on a retournées. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X . Quelle est la probabilité d'avoir $X = 10$?
- 2.3 Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos et on note X le nombre de bosses. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X . Quelle est la probabilité d'avoir $X \leq 1$?
- 2.4 On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes avec remise. X la variable aléatoire réelle égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X . Quelle est la probabilité d'avoir $X \geq 3$.
- 2.5 On considère qu'en moyenne un étudiant sur neuf est gaucher. Dans une classe de 38 étudiants, on sait que 6 personnes font allemand. X est le nombre de gauchers parmi les germanistes. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X . Quelle est la probabilité qu'ils soient tous gauchers ?

3. Manipuler un couple de variables aléatoires.

- 3.1 On pioche de façon indépendante deux nombres dans l'ensemble $\{-1; 1\}$. On note X la somme et Y le produit. Donner la loi conjointe de X et Y dans un tableau. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- 3.2 Soit $a > 0$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket^2$ dont la loi conjointe est donnée pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ par $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}$. Déterminer les lois marginales en fonction de a (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
- 3.3 Soient $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; 3 \rrbracket)$ et $Y \sim \mathcal{B}(3, p)$. On suppose X et Y indépendantes. Donner la loi conjointe de (X, Y) sous forme de tableau.
- 3.4 Soient $(p_1, p_2) \in [0; 1]^2$, $X_1 \sim \mathcal{B}(p_1)$, $X_2 \sim \mathcal{B}(p_2)$ et $\varepsilon \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On pose $Y = \varepsilon X_1 + (1 - \varepsilon) X_2$. On suppose ε indépendant de X_1 et de X_2 . Déterminer la loi de Y .
- 3.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0; n \rrbracket)$ et $\varepsilon \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On suppose X et ε indépendants. On pose $Y = (-1)^\varepsilon X$. Déterminer la loi de Y .

4. Espérance et variance.

- 4.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{U}([1; n])$. Refaire le calcul de l'espérance et la variance de X et en déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev associée.
- 4.2 Soit $p \in [0; 1]$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$.
- 4.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \sim \mathcal{U}([1; n])$ et $Y_n = \cos\left(\frac{X_n}{n}\right)$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.
- 4.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \sim \mathcal{U}([1; n])$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq p)$.
- 4.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n une variable aléatoire vérifiant pour tout $k \in [1; n]$, $\mathbb{P}(X_n = k) = a_n e^{-\sqrt{k}}$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ convergeant vers un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(X_n > \frac{n}{10}\right) = 0$.
- 4.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_n \sim \mathcal{U}([1; n])$ et on pose $Y_n = \frac{n}{X_n^2}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon n) = 0$.

5. En vrac.

- 5.1 On se munit d'une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in [0; 1]$. On lance de façon indépendante n fois la pièce et on note X le rang d'apparition du premier pile. On pose $X = 0$ si sur les n lancers nous n'avons eu aucun pile. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ puis pour tout $k \in [1; n]$, $\mathbb{P}(X = k)$.
- 5.2 On possède N urnes. Chaque urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On pioche successivement et de façon indépendante dans chaque urne. On note X le plus grand numéro obtenu. Pour tout $k \in [1; n]$, calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$ et en déduire la loi de X .
- 5.3 On note S_n la valeur d'une action en bourse le jour n . Au jour 0, on a $S_0 = 1$ et on suppose que chaque jour la valeur de l'action est multipliée par α avec une probabilité $p \in]0; 1[$ et par β sinon. Ceci indépendamment de la valeur de l'action et des jours précédents. Calculer l'espérance de S_{n+1} en fonction de celle de S_n et en déduire l'espérance de S_n .
- 5.4 A ses heures perdues, Enes joue aux fléchettes et lance de façon indépendante n fléchettes. Il atteint sa cible avec une probabilité p . Enes gagne un point à chaque fois qu'il touche la cible. Enes relève les points mais, peu concentré sur cette tâche inintéressante, il se trompe une fois sur 2 en moyenne et augmente le total de 1. On note X le nombre de points que retourne Enes. Exprimer X comme la somme de deux variables aléatoires de loi classique et en déduire $\mathbb{E}(X)$.
- 5.5 Soit (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant

$Y \backslash X$	0	1	2
-1	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Déterminer la loi et l'espérance de $Z = XY$.

- 5.6 n candidats passent un examen. Chaque candidat a la même probabilité $p \in]0; 1[$ de réussir. S'il échoue il a la possibilité de passer un rattrapage au cours duquel il a la même probabilité p de réussir. Quelle est la loi de du nombre de lauréats ?