Interrogation 3 d'entrainement
Bijections

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir une fonction injective, surjective, bijective.
   1.2 Enoncer le théorème de la bijection (version 2).
   1.3 Enoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
   1.4 Définir la négligeabilité entre deux fonctions.
2. **Ensemble image, image réciproque, injection, surjection, bijection.**
   2.1 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^2 + 2x + 1 \end{cases}$. Déterminer $f([-1\,;\,6])$ et $f^{\leftarrow}([-1\,;\,1])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
   2.2 Soit $f : \begin{cases}]-\infty\,;\,3[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(3-x) + 4 \end{cases}$. Déterminer $f\left(\left[-7\,;\,-\frac{3}{4}\right]\right)$ et $f^{\leftarrow}([5\,;\,11])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
   2.3 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$. Déterminer $f\left(\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]\right)$ et $f^{\leftarrow}([-1\,;\,0])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
   2.4 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 4 - 7x^2 + 21x \end{cases}$. Déterminer $f([-2\,;\,2])$ et $f^{\leftarrow}(]-\infty\,;\,18])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
   2.5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^{5x+2} - 2 \end{cases}$. Déterminer $f([0\,;\,8])$ et $f^{\leftarrow}([-7\,;\,-2])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
3. **Fonction réciproque/Dérivée de la réciproque.**
   3.1 Montrer que $f : x \mapsto \left(\sqrt{2x-4}+1\right)\mathrm{e}^x$ définit une bijection de $[2; +\infty[$ dans un ensemble J à déterminer puis montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \left\{\mathrm{e}^2\right\}$ et établir une expression de $\left(f^{-1}\right)'$ en fonction de f^{-1}.
   3.2 Montrer que $f : x \mapsto x^3(3\ln(x) - 1)$ définit une bijection de $]0; 1]$ dans un ensemble J à déterminer puis montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{-1\}$ et établir une expression de $\left(f^{-1}\right)'$ en fonction de f^{-1}.
   3.3 Montrer que $f : x \mapsto \ln(\tan(x))$ définit une bijection de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ dans un ensemble J à déterminer puis montrer que f^{-1} est dérivable sur J et établir une expression de $\left(f^{-1}\right)'$ en fonction de f^{-1}.
   3.4 Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ définit une bijection de $[0; 1[$ dans un ensemble J à préciser et déterminer f^{-1}.
   3.5 Montrer que $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x+5}$ définit une bijection de $[-1; +\infty[$ dans un ensemble J à préciser et déterminer f^{-1}.
   3.6 Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^x$ définit une bijection de $[\ln(2); +\infty[$ dans un ensemble J à préciser et déterminer f^{-1}.
4. **Etude asymptotique.**
   4.1 Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln\left(x^3 + 2x + 1\right)$.
   4.2 Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{4x^3+1}{(x+1)^2}$.
   4.3 Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.
   4.4 Préciser le comportement asymptotique en $-\infty$ de $f : x \mapsto \frac{x+2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.
   4.5 Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x}$.
5. **Comparaison asymptotique.**
   5.1 Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 3x + 1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}$.
   5.2 Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto \sin\left(\frac{3}{x}\right)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.
   5.3 Comparer en 0 les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{3}{x^2}}$ et $g : x \mapsto x^2$.
   5.4 Comparer en 0 les fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   5.5 Comparer en 0 les fonctions $f : x \mapsto 3x + \sqrt{x^6 + 2x^2}$ et $g : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$.