# Interrogation 30 d'entrainement
# Révisions I

1. **Restituer le cours.** *Source : Int20.1*
   1.1 Définir et caractériser une famille libre.
   1.2 Définir et caractériser une famille liée.
   1.3 Définir une famille génératrice.
   1.4 Définir et caractériser une base.
   1.5 Enoncer le théorème de la base adaptée.

   **Restituer le cours.** *Source : Int17.1*

   1.6 Donner la définition de deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire ?
   1.7 Définir la convergence d'une suite complexe (définition IV.1).
   1.8 Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ soit croissante et comment le démontre-t-on ?
   1.9 Donner la forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   1.10 Donner la définition d'une suite extraite. Quand est-ce qu'une suite extraite converge-t-elle ?

2. **Encadrer une intégrale.** *Source : Int26.2*
   2.1 Soit $a > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{e}^{-t^n} \cos\left(\sqrt{t}\right) \ln(t)}{1 + 2t^n} \,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   2.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t} \,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
   2.3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_n^{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} t^5 \,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
   2.4 Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}([0;a])$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^a \arctan\left(\mathrm{e}^{nt} + 2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt} + 3\right) f(t) \,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   2.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{t} \,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

3. **Calculer un développement limité.** *Source : Int14.2*
   2.1 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sqrt{1+x}}$.
   2.2 Calculer un développement à l'ordre 6 en 0 de $f : x \mapsto (\mathrm{ch}(x) - \cos(x))(\mathrm{sh}(x) - \sin(x))$.
   2.3 Calculer un développement à l'ordre 4 en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{2+x}$.
   2.4 Calculer un développement à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \cos(x)$.
   2.5 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{(1+x)^2}$.

4. **Calcul du rang.** *Source : Int22.4*
   4.1 Soit $\mathscr{F} = \left(3 + X + X^2, 5 - 2X^2, 3X + X^2, 1 - X + X^2\right)$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   4.2 Soit $\mathscr{F} = ((1, 0, -2), (4, 2, 1), (-1, 3, 1), (0, 3, 3))$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   4.3 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = 2$ et $\mathscr{F} = \left(P, P', P'', P^{(3)}, P^{(4)}\right)$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   4.4 Calculer le rang de $\mathscr{F} = \left((2)_{n\in\mathbb{N}}, (n!)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}, (5+2n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
   4.5 Soient $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif et $E = \mathscr{F}([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R})$. On considère dans $E$ la famille $\mathscr{F} = \left(x \mapsto \cos(x), x \mapsto x\cos(x), x \mapsto x^2\cos(x)\right)$. Montrer que $\mathscr{F}$ est libre et en déduire son rang.
   *Indication : un tout petit DL...*

5. **Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$.** *Source : Int16.4*

4.1 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} x\sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

4.2 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

4.3 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

4.4 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

4.5 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $f'(0)$.