

Interrogation 31 d'entraînement

Géométrie du plan

1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir un produit scalaire.
- 1.2 Énoncer les propriétés de la norme euclidienne.
- 1.3 Donner la définition d'un déterminant sur $(\mathbb{R}^n)^n$.
- 1.4 Donner les formules géométriques du produit scalaire et du déterminant dans le plan.
- 1.5 Définir le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.
- 1.6 Qu'est-ce qu'un crétin sphérique ?

Révisions

- 1.8 Énoncer le théorème de Weierstrass.
- 1.9 Énoncer la propriété de séparation de l'intégrale.
- 1.10 Énoncer l'inégalité triangulaire.
- 1.11 Énoncer l'inégalité de la moyenne.
- 1.12 Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- 1.13 Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

2. Equations de droites et de cercles.

- 2.1 Soient $A(3, -1)$ et $B(2, 1)$. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de (AB) .
- 2.2 Soient $A(1, 1)$ et $B(3, 7)$. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de la médiatrice de $[AB]$.
- 2.3 Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $\mathcal{D} : 3x + 2y + 2 = 0$ passant par $A(1, -1)$.
- 2.4 Déterminer des équation cartésiennes et paramétriques du cercle de centre $\Omega(-2, -1)$ et passant par $A(1, 1)$.
- 2.5 Soient $A(1, 0)$ et $B(3, 2)$. Déterminer des équations et paramétriques du cercle de diamètre $[AB]$.
- 2.6 Déterminer le centre et le rayon du cercle passant par $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ et $C(-6, 8)$.

3. Projeté orthogonal et distance.

- 3.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $M(-7, 18)$. Calculer la distance de M à $\mathcal{D}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté de M sur $\mathcal{D}$.
- 3.2 Soient $A(0, 1)$, $B(3, -1)$ et $M(3, 12)$ trois points du plan. Calculer la distance de M à (AB) et déterminer les coordonnées de H , le projeté de M sur (AB) .
- 3.3 Soient $A(0, 1)$, $B(3, 1)$ et $M(4, -1)$ trois points du plan. Calculer la distance de M à (AB) et déterminer les coordonnées de H , le projeté de M sur (AB) .
- 3.4 Montrer que $d_1 : 2x + y = 5$ et $d_2 : 2x + y = -2$ sont parallèles et déterminer la distance de d_1 à d_2 .
- 3.5 Soient $d_1 : 3x - 4y + 4 = 0$ et $d_2 : 12x + 5y - 5 = 0$ et $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M, d_1) = d(M, d_2)\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est l'union de deux droites perpendiculaires.
Ce sont les bissectrices de d_1 et d_2 .

4. Intersection.

- 4.1 Déterminer le **nombre** de points d'intersection des cercles $\mathcal{C} : x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$.
- 4.2 Montrer que les droites $\mathcal{D}_1 : 3x - y + 8 = 0$, $\mathcal{D}_2 : x - 3y - 4 = 0$ et $\mathcal{D}_3 : x + 3y + 11 = 0$ sont concourantes et vérifier que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont orthogonales.
- 4.3 Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ et $M(-2, 0) \in \mathcal{C}$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M .
- 4.4 Déterminer l'ensemble des points d'intersection du cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0$ et de la droite $\mathcal{D} : x + y + 1 = 0$.
- 4.5 Soient $A(1, 1)$ et $B(2, 0)$. Déterminer l'ensemble des points d'intersection du cercle de centre $\Omega(1, 2)$ de rayon 1 et de la droite (AB) .

5. Montrer qu'une application est un produit scalaire.

- 5.1 Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1])$. Montrer que $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$ est un produit scalaire sur E .
- 5.2 Soit $E = \mathbb{C}$ vu en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Montrer que $\varphi : (z, z') \mapsto \operatorname{Re}(zz')$ est un produit scalaire sur E .
- 5.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^1 t^n P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur E .
- 5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_i > 0$. Montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T D Y$ est un produit scalaire sur E .
- 5.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k)$ est un produit scalaire sur E .