

Correction de l'interrogation 31 d'entraînement Géométrie du plan

1. Restituer le cours.

1.1 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire est une application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

- (bilinearité) Pour tout $(x, y, x', y) \in E^4$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle \lambda x + \mu x' | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x' | y \rangle \quad \text{et} \quad \langle x | \lambda y + \mu y' \rangle = \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x | y' \rangle.$$

- (symétrie) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$.
- (positive) Pour tout $x \in E$, $\langle x | x \rangle \geq 0$.
- (définie) Pour tout $x \in E$, $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

1.2 Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $\|\cdot\|$ une norme sur E , $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

- (définie) $\|x\| = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_E$
- (positivité) $\|x\| \geq 0$
- (pseudo-linéarité) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (norme de la somme) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2$
- (Pythagore) si x et y sont orthogonaux alors, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

1.3 Le déterminant est l'unique application $\det$ de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(C_1, \dots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- i. (*n*-linéarité) $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\forall C'_i \in \mathbb{R}^n$,

$$\det(C_1, \dots, \lambda C_i + \mu C'_i, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \mu \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n).$$

- ii. (*alternance*) $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $i \neq j$, on a

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n).$$

- iii. (*normalisation*) Si $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\det(\mathcal{C}) = 1$.

1.4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

1.5 Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et $\vec{v}$ un vecteur du plan. Le projeté orthogonal du $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est défini comme étant le vecteur

$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left\langle \vec{v} \left| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right. \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

1.6 Un crétin sphérique est un individu gonflé (bien sûr) fermé et borné (comme la sphère en tant que partie de $\mathbb{R}^3$), et ce quel que soit le point de vue par lequel on l'observe !

Cette insulte est de Zwicky un astrophysicien du XX^{ème} siècle réputé pour ses idées, ses découvertes de supernovae et... son caractère profondément irascible.

2. Equations de droites et de cercles.

2.1 Soient $A(3, -1)$ et $B(2, 1)$. On note que $\overrightarrow{AB}(-1, 2)$ est un vecteur directeur de (AB) et $A(3, -1)$ un point de (AB) . On obtient donc les équations paramétriques suivantes :

$$(AB) : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Méthode 1. On observe que $\vec{n}(2, 1)$ est un vecteur normal à (AB) . Pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a donc

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x-3 \\ y+1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 6 + y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y = 5. \end{aligned}$$

Méthode 2. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ y+1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 6 + y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y = 5. \end{aligned}$$

Méthode 3. A l'aide des équations paramétriques, pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = 3 - x \\ y = -1 + 2(3 - x) = 5 - 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 2x + y = 5. \end{aligned}$$

Méthode 4. On observe que $\vec{n}(2, 1)$ est un vecteur normal à (AB) . Donc une équation cartésienne de (AB) est donnée pour un $d \in \mathbb{R}$ par

$$2x + y = d.$$

Or $A(3, -1) \in (AB)$ donc

$$6 - 1 = d \Leftrightarrow d = 5.$$

D'où $(AB) : 2x + y = 5$.

Conclusion, dans tous les cas une équation cartésienne de (AB) est donnée par

$$(AB) : 2x + y = 5.$$

2.2 Soient $A(1, 1)$ et $B(3, 7)$. Soit $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[AB]$. Soit I le milieu de $[AB]$. On a

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4.$$

Donc $I(2, 4)$ est un point de $\mathcal{D}$. De plus $\overrightarrow{AB}(2, 6)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ ou encore $\vec{n}(1, 3)$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$.

Méthode 1. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{IM} | \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x-2 \\ y-4 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 + 3y - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y = 14. \end{aligned}$$

Méthode 2. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} : x + 3y = d$. Or $I(2, 4) \in \mathcal{D}$. Donc

$$2 + 12 = d \Leftrightarrow d = 14.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} : x + 3y = 14.}$$

Méthode 1. Puisque $\vec{n}(1, 3)$ est normal, $\vec{u}(-3, 1)$ est directeur de $\mathcal{D}$. De plus $I(2, 4) \in \mathcal{D}$. Donc

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

Méthode 2. Par les équations paramétriques, pour $M(x, y) \in \mathcal{D}$,

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x + 3y = 14 \Leftrightarrow x = 14 - 3y \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 14 - 3t \\ y = t \end{cases}.$$

On obtient,

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 14 - 3t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2.3 Puisque $\vec{n}(3, 2)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$, il est aussi normal à $\mathcal{D}'$.

Méthode 1. Soit $M(x, y) \in \mathcal{D}'$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 3 + 2y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 2y = 1. \end{aligned}$$

Méthode 2. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D}' : 3x + 2y = d$. Or $A(1, -1) \in \mathcal{D}'$. Donc

$$3 - 2 = d \Leftrightarrow d = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}' : 3x + 2y = 1.}$$

Méthode 1. Puisque $\vec{n}(3, 2)$ est normal, $\vec{u}(-2, 3)$ est directeur de $\mathcal{D}'$. De plus $A(1, -1) \in \mathcal{D}'$. Donc

$$\boxed{\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

Méthode 2. Par les équations paramétriques, pour $M(x, y) \in \mathcal{D}'$,

$$M \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow 3x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1-3t}{2} \end{cases}.$$

On obtient,

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1-3t}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2.4 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(-2, -1)$ et passant par $A(1, 1)$. Soit R son rayon. On a

$$R = \Omega A = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Ainsi, une équation cartésienne est

$$\boxed{\mathcal{C} : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 13.}$$

Des équations paramétriques sont

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = -2 + \sqrt{13} \cos(\theta) \\ y = -1 + \sqrt{13} \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [0; 2\pi[\text{ (ou } \mathbb{R}).$$

2.5 Soient $A(1, 0)$ et $B(3, 2)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. On peut procéder en notant que Ω le centre est le milieu de $[AB]$ et $R = \frac{AB}{2}$ ou utiliser la proposition V.8. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow ABM \text{ est rectangle en } M \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{BM} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + y^2 - 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + 3 + (y-1)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2. \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne est donnée par

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

On note alors que $\Omega(2, 1)$ est le centre du cercle et $R = \sqrt{2}$ son rayon. Ainsi, des équations paramétriques sont données par

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \cos(\theta) \\ y = 1 + \sqrt{2} \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in]-\pi; \pi] \text{ (ou } \mathbb{R}).$$

2.6 Soient d_1 la médiatrice de $[AB]$, d_2 celle de $[BC]$. Puisque $\Omega A = \Omega B = \Omega C$, on en déduit que Ω est équidistant de A et B et donc $\Omega \in d_1$. De même $\Omega \in d_2$.

Le cercle recherché est le cercle circonscrit dont le centre se trouve être l'intersection des trois médiatrices. Soient I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. On a $I(5/2, 5/2)$ et $J(-1, 11/2)$. $\overrightarrow{AB}(3, 1)$ est un vecteur normal à d_1 . Donc pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} M \in d_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{IM} | \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x - \frac{5}{2} \\ y - \frac{5}{2} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - \frac{15}{2} + y - \frac{5}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + y = 10. \end{aligned}$$

Donc

$$d_1 : 3x + y = 10.$$

De même, $\overrightarrow{BC}(-10, 5)$ ou encore $\vec{n}(-2, 1)$ est un vecteur normal à d_2 : pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} M \in d_2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{JM} | \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x + 1 \\ y - \frac{11}{2} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x - 2 + y - \frac{11}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + y = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$d_2 : -2x + y = \frac{15}{2}.$$

Soit (a, b) les coordonnées de Ω . Puisque $\Omega \in d_1 \cap d_2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3a + b = 10 \\ -2a + b = \frac{15}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 10 \\ -5a = -\frac{5}{2} \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - 3a = 10 - \frac{3}{2} = \frac{17}{2} \\ a = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\Omega(1/2, 17/2)$. Puis le rayon est donné par

$$R = \Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ -13/2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1+169}{4}} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \sqrt{\frac{85}{2}}.$$

Conclusion, le cercle passant par A , B et C

$$\boxed{\text{a pour centre } \Omega(1/2, 17/2) \text{ et rayon } R = \sqrt{\frac{85}{2}}.}$$

On pense à vérifier que $\Omega B = R = \Omega C$.

$$\begin{aligned} \Omega A = \|\overrightarrow{\Omega B}\| &= \left\| \begin{bmatrix} 7/2 \\ -11/2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{49+121}{4}} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \sqrt{\frac{85}{2}} = R \text{ OK!} \\ \Omega A = \|\overrightarrow{\Omega C}\| &= \left\| \begin{bmatrix} -13/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{169+1}{4}} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \sqrt{\frac{85}{2}} = R \text{ OK!} \end{aligned}$$

3. Projeté orthogonal.

3.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $M(-7, 18)$. D'après ses équations paramétriques, $A(5, 2)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Alors, $\vec{n} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est normal à $\vec{u}$ et donc à $\mathcal{D}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{D}) &= \|p_{\vec{n}}(\overrightarrow{MA})\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 12 \\ -16 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} (36 - 16) \\ &= 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d(M, \mathcal{D}) = 2\sqrt{10}.}$$

Méthode 1. On en déduit donc que

$$H = M \pm d(M, \mathcal{D}) \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{bmatrix} -7 \\ 18 \end{bmatrix} \pm \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 18 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -13 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Or (par exemple, on pouvait aussi chercher le point tel que $\overrightarrow{HM}$ et normal à $\vec{u}$ ou colinéaire à $\vec{n}$)

$$H \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = 0.$$

Si $H(-1, 20)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 18 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0.$$

Donc $(-1, 20) \in \mathcal{D}$. Si $H(-13, 16)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} -18 & 14 \\ -18 & 3 \end{vmatrix} = -18 \times 3 + 14 \times 18 = 18(14 - 3) = 18 \times 11 \neq 0.$$

donc $(-13, 16) \notin \mathcal{D}$. Conclusion,

$$H \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Méthode 2. Comme $A \in \mathcal{D}$ et que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$:

$$H = A + \frac{\langle \overrightarrow{AM} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{9 + 1} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{12 + 48}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$H \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

3.2 Soient $A(0, 1)$, $B(3, -1)$ et $M(3, 12)$ trois points du plan. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) . On remarque alors que $\vec{n} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\vec{u}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d(M, (AB)) &= \left\| p_{\vec{n}}(\overrightarrow{MA}) \right\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} (6 + 33) \\ &= 3\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$d(M, (AB)) = 3\sqrt{13}.$$

Méthode 1. De là, on en déduit également que

$$H = M \pm \frac{d(M, (AB))}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} \pm \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Or (par exemple, on pouvait aussi chercher le point tel que $\overrightarrow{HM}$ et normal à $\vec{u}$ ou colinéaire à $\vec{n}$)

$$H \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = 0.$$

Si $H(9, 21)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 20 & -2 \end{vmatrix} = -18 - 60 \neq 0.$$

Donc $(9, 21) \notin (AB)$. Si $H(-3, 3)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

donc $(-3, 3) \in (AB)$. Conclusion,

$$H \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Méthode 2. On a

$$H = A + \frac{\langle \overrightarrow{AM} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{9-22}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$H \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3.3 Soient $A(0, 1)$, $B(3, 1)$ et $M(4, -1)$ trois points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou encore $\vec{u} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) . On remarque alors que $\vec{n} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\vec{u}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d(M, (AB)) &= \left\| p_{\vec{n}}(\overrightarrow{MA}) \right\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$d(M, (AB)) = 2.$$

Méthode 1. De là, on en déduit également que

$$H = M \pm \frac{d(M, (AB))}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \pm 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Or (par exemple, on pouvait aussi chercher le point tel que $\overrightarrow{HM}$ et normal à $\vec{u}$ ou colinéaire à $\vec{n}$)

$$H \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = 0.$$

Si $H(4, 1)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc $(4, 1) \in (AB)$. Si $H(4, -3)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

donc $(4, -3) \notin (AB)$. Conclusion,

$$H \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Méthode 2. On a

$$H = A + \frac{\langle \overrightarrow{AM} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$H \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.4 On note que $\vec{n}_1(2, 1)$ est un vecteur normal à d_1 et $\vec{n}_2(2, 1)$ un vecteur normal à d_2 . Puisque $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}$,

les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

Pour déterminer la distance de d_1 à d_2 , il suffit de prendre un point d'une des droites et de chercher sa distance à l'autre droite. On observe par exemple que $M(2, 1)$ est un point de d_1 (car $2 \times 2 + 1 = 5$). Calculons la distance de M à d_2 . On observe que $A(-1, 0)$ est un point de d_2 et $\vec{n}(2, 1)$ un vecteur normal à d_2 . Donc

$$\begin{aligned} d(M, d_2) &= \left\| p_{\vec{n}}(\overrightarrow{MA}) \right\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{7}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{7\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion, d la distance entre d_1 et d_2 est donnée par

$$d = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

3.5 Soient $d_1 : 3x - 4y + 4 = 0$ et $d_2 : 12x + 5y - 5 = 0$ et $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M, d_1) = d(M, d_2)\}$. On observe que $\vec{n}_1(3, -4)$ est un vecteur normal à d_1 et $\vec{n}_2(12, 5)$ à d_2 . On observe également que $A(0, 1)$ est un point à la fois de d_1 et à la fois de d_2 (c'est le point d'intersection des deux droites). Soit $M(x, y)$. On a alors

$$\begin{aligned} d(M, d_1) &= \left\| \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} \right\rangle \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y - 1 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{9 + 16}} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{5} |3x - 4y + 4|. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} d(M, d_2) &= \left\| \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|} \right\rangle \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y - 1 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{144 + 25}} \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{13} |12x + 5y - 5|. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow \frac{1}{5} |3x - 4y + 4| = \frac{1}{13} |12x + 5y - 5| \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{5} (3x - 4y + 4) = \frac{1}{13} (12x + 5y - 5) \quad \text{OU} \quad \frac{1}{5} (3x - 4y + 4) = -\frac{1}{13} (12x + 5y - 5) \\ &\Leftrightarrow 39x - 52y + 52 = 60x + 25y - 25 \quad \text{OU} \quad 39x - 52y + 52 = -60x - 25y + 25 \\ &\Leftrightarrow 21x + 77y = 77 \quad \text{OU} \quad 99x - 27y = -27 \\ &\Leftrightarrow 3x + 11y = 11 \quad \text{OU} \quad 11x - 3y = -3. \end{aligned}$$

Posons $d_3 : 3x + 11y = 11$ et $d_4 : 11x - 3y = -3$. On observe bien que $\mathcal{E}$ est l'union de d_3 et d_4 . Le vecteur $\vec{n}_3(3, 11)$ est normal à d_3 et $\vec{n}_4(11, -3)$ à d_4 . Puisque

$$\langle \vec{n}_3 | \vec{n}_4 \rangle = 33 - 33 = 0,$$

on en déduit que n_3 et n_4 sont orthogonaux et donc d_3 et d_4 sont bien perpendiculaires. Conclusion,

$\mathcal{E}$ est l'union de deux droites d_3 et d_4 perpendiculaires entre elles.

De plus, on peut observer que $A(0,1)$ appartient à d_3 et d_4 . Toutes ces droites sont bien concourantes en A . Les droites d_3 et d_4 sont les bissectrices de d_1 et d_2 .

4. Intersection.

4.1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 = 2^2.$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon $R = 2$. De la même façon, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 7 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 = 3^2.$$

Donc $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $\Omega'(-1,1)$ et de rayon $R' = 3$. On observe alors que

$$\Omega\Omega' = \|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\| = \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

D'autre part, $R + R' = 3 + 2 = 5$ et $|R - R'| = 3 - 2 = 1$. Donc

$$|R - R'| = 1 < \Omega\Omega' < 5 = R + R'.$$

Conclusion, les deux cercles se coupent en deux points distincts.

4.2 Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \\ x + 3y + 11 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 3x - y + 8 = 0 \\ x + 3y + 11 = 0 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 8y + 20 = 0 \\ 6y + 15 = 0 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \end{aligned} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 = 0 \\ y = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \times (-\frac{5}{2}) + 4 = -\frac{7}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve donc bien un point d'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \{(-7/2; -5/2)\}$. Donc

les trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes. De plus $\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$ et $\vec{n}_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

est un vecteur normal à $\mathcal{D}_3$. Or $\langle \vec{n}_1 | \vec{n}_3 \rangle = 3 \times 1 - 1 \times 3 = 0$. Donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_3$ sont orthogonaux donc

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont perpendiculaires.

4.3 Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ et $M(-2, 0) \in \mathcal{C}$.

NB : on a bien $M \in \mathcal{C}$ car $(-2)^2 + 4 \times (-2) + 4 = 0$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = 9 = 3^2.$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2, -3)$ et de rayon $R = 3$. Alors le vecteur $\overrightarrow{\Omega M} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point M . Soit $N(x, y) \in \mathcal{T}$. On a

$$N \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{MN} | \overrightarrow{\Omega M} \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x+2 \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 3y = 0.$$

Conclusion,

$y = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point M .

4.4 Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-x - 1)^2 + \frac{5}{2}x + 2(-x - 1) + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{2}x - 2x - 2 + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à $2x^2 + 5x + 2$. On a $\Delta = \frac{25}{4} - 8 = -\frac{7}{4} < 0$ Nous n'avons donc aucune solution. L'ensemble des points d'intersection est vide.

Autre méthode : On pouvait le voir en calculant le centre du cercle, son rayon, puis la distance du centre du cercle à la droite $\mathcal{D}$ et en vérifiant que cette distance est strictement plus grande que le rayon du cercle : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + (y + 1)^2 - 1 + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{5}{4}, -1\right)$ et de rayon $R = \frac{3}{4}$. Le vecteur $\vec{n}(1, 1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$, d'équation $x + y + 1 = 0$ donc

$$d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{\left|-\frac{5}{4} - 1 + 1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

Donc $d(\Omega, \mathcal{D})^2 = \frac{25}{32} > \frac{18}{32} = \frac{9}{16} = R^2$. Donc $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$ et on conclut

La droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ ne s'intersectent pas.

NB : cette méthode ne retourne que le nombre de points d'intersection mais ne calcule pas leurs coordonnées lorsque ces points existent. D'autre part, on note que $\vec{u} = \vec{AB} = (1, -1)$ est un vecteur directeur de (AB) . Donc $\vec{n}(1, 1)$ est un vecteur normal à (AB) . Pour $M(x, y)$, on a

$$\begin{aligned}
 M \in (AB) &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow x - 1 + y - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x + y = 2.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{C} \cap (AB) &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ x+y=2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y=2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (2-x-2)^2 = 1 \\ y=2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + x^2 = 1 \\ y=2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x = 0 \\ y=2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y=2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow M(1,1) \quad \text{OU} \quad M(0,2).
 \end{aligned}$$

Conclusion, $\mathcal{I}$ l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite (AB) est constitué de deux points :

$$\mathcal{I} = \{(1,1); (0,2)\}.$$

On peut vérifier que ces deux points vérifient l'équation de (AB) et de $\mathcal{C}$.

5. Montrer qu'une application est un produit scalaire.

5.1 Soit $E = \mathcal{C}^1([0;1])$. Pour tout $(f, g) \in E^2$, f, g, f' et g' sont continues sur $[0;1]$ donc $fg + f'g'$ également. Donc $\varphi(f, g)$ pour tout $(f, g) \in E^2$. Donc φ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(f, g, h) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (symétrie)

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt = \int_0^1 (g(t)f(t) + g'(t)f'(t)) dt = \varphi(g, f).$$

- (bilinéarité)

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda f + \mu h, g) &= \int_0^1 ((\lambda f(t) + \mu h(t))g(t) + (\lambda f + \mu h)'(t)g'(t)) dt \\
 &= \int_0^1 (\lambda f(t)g(t) + \mu h(t)g(t) + \lambda f'(t)g'(t) + \mu h'(t)g'(t)) dt \\
 &= \lambda \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt + \mu \int_0^1 (h(t)g(t) + h'(t)g'(t)) dt \\
 &= \lambda \varphi(f, g) + \mu \varphi(h, g).
 \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (positive)

$$\varphi(f, f) = \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt$$

Pour tout $t \in [0;1]$, $f(t)^2 + f'(t)^2 \geq 0$. Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(f, f) \geq 0.$$

- (définie) Supposons $\varphi(f, f) = 0$. La fonction $t \mapsto f(t)^2 + f'(t)^2$ est **continue** sur $[0,1]$, **positive**, **d'intégrale nulle**. Donc par le principe de séparation de l'intégrale, $\forall t \in [0;1]$, $f(t)^2 + f'(t)^2 = 0$. Or la somme de deux réels positifs est nulle si les deux réels sont nuls :

$$\forall t \in [0;1] \quad \begin{cases} f(t) = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow f = 0_E.$$

Conclusion,

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathcal{C}^1([0; 1]).$$

5.2 Soit $E = \mathbb{C}$ vu en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. La fonction φ est bien définie sur $\mathbb{C}^2$ et renvoie bien un réel. De plus, pour tout $(z, z', z'') \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (symétrie)

$$\begin{aligned} \varphi(z, z') &= \operatorname{Re}(z \bar{z}') = \operatorname{Re}(\overline{z z'}) && \text{car } \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(\bar{a}) \\ &= \operatorname{Re}(\bar{z} z') \\ &= \operatorname{Re}(z' \bar{z}) && = \varphi(z', z). \end{aligned}$$

- (bilinéarité)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda z + \mu z', z'') &= \operatorname{Re}((\lambda z + \mu z') \bar{z}'') \\ &= \operatorname{Re}(\lambda z \bar{z}'' + \mu z' \bar{z}'') \\ &= \lambda \operatorname{Re}(z \bar{z}'') + \mu \operatorname{Re}(z' \bar{z}'') && \text{car } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \\ &= \lambda \varphi(z, z'') + \mu \varphi(z', z''). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (positive)

$$\varphi(z, z) = \operatorname{Re}(z \bar{z}) = \operatorname{Re}(|z|^2) = |z|^2 \quad \text{car } |z|^2 \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\varphi(z, z) \geq 0.$$

- (définie) Supposons $\varphi(z, z) = 0$. Par ce qui précède, on a alors $|z|^2 = 0$ i.e. $z = 0$.

Conclusion,

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{C}.$$

5.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $t \mapsto P(t)$ et $t \mapsto Q(t)$ sont deux fonctions continues sur $[0; 1]$ en tant que fonction polynomiale. Donc $t \mapsto t^n P(t) Q(t)$ aussi et donc $\varphi(P, Q) = \int_0^1 t^n P(t) Q(t) dt$. Ceci étant vrai pour tout $(P, Q) \in E^2$, on en déduit que φ est bien définie sur E^2 et renvoie bien un réel. De plus, pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (symétrie)

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 t^n P(t) Q(t) dt = \int_0^1 t^n Q(t) P(t) dt = \varphi(Q, P).$$

- (bilinéarité)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \int_0^1 t^n (\lambda P(t) + \mu Q(t)) R(t) dt \\ &= \lambda \int_0^1 t^n P(t) R(t) dt + \mu \int_0^1 t^n Q(t) R(t) dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda \varphi(P, R) + \mu \varphi(Q, R). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (positive)

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 t^n P(t)^2 dt$$

Pour tout $t \in [0; 1]$, $P(t)^2 \geq 0$ et $t^n \geq 0$ car $t \geq 0$. Donc pour tout $t \in [0; 1]$, $t^n P(t)^2 \geq 0$. Par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(P, P) \geq 0.$$

- (définie) Supposons $\varphi(P, P) = 0$. La fonction $t \mapsto t^n P(t)^2$ est **continue** sur $[0; 1]$, **positive**, **d'intégrale nulle**. Donc par le principe de séparation de l'intégrale, $\forall t \in [0; 1]$, $t^n P(t)^2 = 0$. Or pour tout $t \in]0; 1]$, $t^n \neq 0$, donc $\forall t \in]0; 1]$, $P(t) = 0$. Donc le polynôme P possède une infinité de racines. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Conclusion,

 φ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_i > 0$. Pour tout $(X, Y) \in E^2$, $X^T \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $X^T D Y$ et appartient à $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ i.e. est un réel. Donc φ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(X, Y, Z) \in E^3$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (*symétrie*) $\varphi(X, Y) = X^T D Y$. Puisque $X^T D Y \in \mathbb{R}$, $X^T D Y = (X^T D Y)^T$. Par propriété,

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y) &= X^T D Y = (X^T D Y)^T \\ &= Y^T D^T (X^T)^T \\ &= Y^T D X \quad \text{car } D \text{ est symétrique car diagonale} \quad = \varphi(Y, X). \end{aligned}$$

- (*bilinéarité*)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda X + \mu Y, Z) &= (\lambda X + \mu Y)^T D Z \\ &= (\lambda X^T + \mu Y^T) D Z \quad \text{par linéarité de la transposée} \\ &= \lambda X^T D Z + \mu Y^T D Z \\ &= \lambda \varphi(X, Z) + \mu \varphi(Y, Z). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (*positive*)

$$\varphi(X, X) = X^T D X.$$

Notons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \varphi(X, X) &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{bmatrix} \\ &= a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_i > 0$, donc $a_i x_i^2 \geq 0$ et donc

$$\varphi(X, X) \geq 0.$$

- (*définie*) Supposons $\varphi(X, X) = 0$. Par ce qui précède, on a $\sum_{k=1}^n a_k x_k^2 = 0$. Puisque pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_k x_k^2 \geq 0$, on en déduit que nécessairement,

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad a_k x_k^2 = 0.$$

Or pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_k > 0$. Donc $x_k = 0$ et finalement $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Conclusion,

 φ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^n$.

5.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. La fonction φ est bien définie sur E^2 et est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (*symétrie*)

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(k) P^{(k)}(k) = \varphi(Q, P).$$

- (bilinéarité)

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \sum_{k=0}^n (\lambda P + \mu Q)^{(k)}(k) R^{(k)}(k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) R^{(k)}(k) + \mu \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(k) R^{(k)}(k) \\ &= \lambda \varphi(P, R) + \mu \varphi(Q, R).\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (positive)

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^n \left(P^{(k)}(k)\right)^2.$$

En tant que somme de termes positifs,

$$\varphi(P, P) \geq 0.$$

- (définie) Supposons $\varphi(P, P) = 0$ alors $\sum_{k=0}^n \left(P^{(k)}(k)\right)^2 = 0$. Puisque les termes sont positifs,

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P^{(k)}(k) = 0.$$

Puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P^{(n)} \in \mathbb{R}_0[X]$ est constant (éventuellement nul). Or $P^{(n)}(n) = 0$. Donc $P^{(n)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $P^{(n-1)}$ est constant. Or $P^{(n-1)}(n-1) = 0$ donc $P^{(n-1)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Par récurrence, on en déduit que $P^{(0)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On peut aussi procéder par l'absurde. Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Soit d son degré et a_d son coefficient dominant. Dès lors, $P^{(d)} = d!a_d$. Puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $d \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Donc $P^{(d)}(d) = 0$. D'où $d!a_d = 0$ impossible. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}_n[X].}$$