

Interrogation 32 d'entraînement Géométrie de l'espace

1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir un produit scalaire.
- 1.2 Donner la définition d'un déterminant sur $(\mathbb{R}^n)^n$.
- 1.3 Énoncer les propriétés du déterminant.
- 1.4 Caractériser par le déterminant le fait qu'un point appartienne au plan (ABC) .
- 1.5 Définir le produit vectoriel.
- 1.6 Mon premier est un savant de mauvaise foi, mon deuxième est un fruit maniaque, mon troisième a des origines diverses et fabrique un tapis, mon quatrième a très facilement repéré Al, mon tout est le thème de cette interro!

Révisions

- 1.7 Définir une probabilité et une variable aléatoire réelle.
- 1.8 Définir un système complet d'événements et une distribution de probabilité.
- 1.9 Définir les trois lois usuelles.
- 1.10 Énoncer la formule des probabilités composées.
- 1.11 Énoncer la formule de Bayes.
- 1.12 Définir et caractériser l'indépendance de deux événements.
- 1.13 Définir les deux types d'indépendance pour une famille d'événements.

2. Equations de droites et de plans.

- 2.1 Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x + y - 4z = 6 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$. Déterminer une équation paramétrique, des vecteurs normaux, un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- 2.2 Soient $A(-1, 1, 0)$ et $B(3, -1, 1)$. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de $\mathcal{D} = (AB)$. Déterminer des vecteurs normaux à $\mathcal{D}$, orthogonaux entre eux.
- 2.3 Soient $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(1, -1, -3)$. Déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique de $\mathcal{P} = (ABC)$. Préciser un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.
- 2.4 Soit $\mathcal{P} : x + 2y - 3z + 4 = 0$. Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{P}$. Préciser un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.
- 2.5 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$. Déterminer des équations paramétriques de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$.
Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes et déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ contenant ces deux droites.

3. Projeté orthogonal.

- 3.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ une droite de l'espace, $M(1, 2, 3)$ un point de l'espace. Calculer la distance de M à $\mathcal{D}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.
- 3.2 Soient $A(0, 1, 0)$, $B(2, 3, -1)$ et $M(0, 0, 5/2)$ trois points de l'espace. Calculer la distance de M à (AB) et déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de M sur (AB) .
- 3.3 Soient $\mathcal{P} : -3x + 2y + z + 7 = 0$ un plan de l'espace et $M(-7, 6, 2)$ un point de l'espace. Calculer la distance de M à $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
- 3.4 Soient $\mathcal{P} : -4x + 2y - 3z - 5 = 0$ un plan de l'espace et $M(7, -5, 5)$ un point de l'espace. Calculer la distance de M à $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
- 3.5 Calculer la distance de $M(1, 0, 0)$ à la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

4. Intersection.

- 4.1 Soient $A(1, 2, -3)$, $B(-1, 2, 0)$ et $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 2 = 0$. Déterminer des équations paramétriques de (AB) et en déduire l'ensemble des points d'intersection de (AB) avec $\mathcal{P}$.
- 4.2 Montrer que les droites $\mathcal{D} : \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - 3z = 2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 5z = -6 \end{cases}$ ne sont pas coplanaires.
- 4.3 Déterminer des équations cartésiennes et paramétriques de l'intersection de $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A(1, -1, 0)$ et dirigé par $\vec{u}(2, 1, -1)$ et $\vec{v}(1, 4, 1)$ et le plan $\mathcal{P}'$ passant par $B(1, 2, 1)$, $C(1, 4, 0)$ et $E(1, -1, 3)$.
- 4.4 Déterminer une équation de la sphère de centre $\Omega(1, -2, 3)$ tangente au plan $\mathcal{P} : x + y + z = -4$.
- 4.5 Soient $\mathcal{P} : 3x + 4z = -1$ et $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(2, -1, 1)$ et de rayon $R = 3$. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

5. Calculer un déterminant.

5.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A . A est-elle inversible ?

- 5.2 Soient $A(1, -2, 3)$, $B(1, -1, 4)$, $C(2, -1, 5)$, $D(2, -2, 4)$, $E(2, -1, 3)$, $F(2, 0, 4)$, $G(3, 0, 5)$, $H(3, -1, 4)$ des points de l'espace. On admet que $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Calculer son volume.

5.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A . A est-elle inversible ?

5.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A . A est-elle inversible ?

5.5 Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A . A est-elle

inversible ?