

Correction de l'interrogation 32 d'entraînement Géométrie de l'espace

1. Restituer le cours.

1.1 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire est une application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

- (bilinearité) Pour tout $(x, y, x', y) \in E^4$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle \lambda x + \mu x' | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x' | y \rangle \quad \text{et} \quad \langle x | \lambda y + \mu y' \rangle = \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x | y' \rangle.$$

- (symétrie) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$.
- (positive) Pour tout $x \in E$, $\langle x | x \rangle \geq 0$.
- (définie) Pour tout $x \in E$, $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

1.2 Le déterminant est l'unique application $\det$ de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(C_1, \dots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- i. (n -linéarité) $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\forall C'_i \in \mathbb{R}^n$,

$$\det(C_1, \dots, \lambda C_i + \mu C'_i, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \mu \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n).$$

- ii. (alternance) $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $i \neq j$, on a

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n).$$

- iii. (normalisation) Si $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\det(\mathcal{C}) = 1$.

1.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.

1.4 Soient A, B, C et M quatre points de l'espace. Alors,

$$M \in (ABC) \quad \Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0.$$

1.5 Le produit vectoriel $\cdot \wedge \cdot$ est l'unique application de $(\mathbb{R}^3)^2$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant pour tout $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}') \in (\mathbb{R}^3)^4$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (bilinearité) $(\lambda \vec{u} + \mu \vec{u}') \wedge \vec{v} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u}' \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v} + \mu \vec{v}') = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u} \wedge \vec{v}'$.
- (anti-symétrie) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ et $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.

1.6 La lecture de corrigé ne sert pas à grand chose, il faut chercher par soi-même ;). Au premier qui trouve, j'offre une boîte de : mon premier est un artiste qui a aussi fait du piano, mon deuxième est un artiste amical, mon troisième est un artiste avec de grandes oreilles mon tout se mange à Pâques.

2. Equations de droites et de plans.

2.1 Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x + y - 4z = 6 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$. On observe directement que

$$\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{n}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ sont des vecteurs normaux à } \mathcal{D}.$$

Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 4z = 6 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 10z = 2 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases} &L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ &&&\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}z \\ x = 2 + y - 3z = 2 + \frac{2}{3} + \frac{10}{3}z - 3z = \frac{8}{3} + \frac{z}{3} \end{cases} \\ &&&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} + \frac{z}{3} \\ y = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}z \\ z = z \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \frac{8}{3} + \frac{t}{3} \\ y = \frac{2}{3} + \frac{10t}{3} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

De là on conclut que

$$A(8/3, 2/3, 0) \text{ est un point de } \mathcal{D} \text{ et } \vec{u} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D}.$$

NB : on pouvait aussi obtenir le vecteur directeur par le calcul suivant :

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

qui est bien colinéaire à $\vec{u}$.

2.2 Soient $A(-1, 1, 0)$ et $B(3, -1, 1)$. On observe que $A(-1, 1, 0)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Donc une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Méthode 1. Dès lors pour $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, on a

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 4z \\ y = 1 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4z = -1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}.$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x - 4z + 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. *Attention à ne pas retourner $\vec{n}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ qui n'est pas orthogonal à $\vec{n}_1$.* Cependant, on a

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Alors $\vec{n}_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix}$ est normal à $\overrightarrow{AB}$ et donc à $\mathcal{D}$ et est aussi orthogonal à $\vec{n}_1$ (vérifiez!). Conclusion,

$$\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{n}_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ sont deux vecteurs normaux à } \mathcal{D} \text{ et orthogonaux entre eux.}$$

Méthode 2. On observe que $\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\overrightarrow{AB}$ et donc à $\mathcal{D}$. De plus,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Alors $\vec{n}_2 \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$ est normal à $\overrightarrow{AB}$ et donc à $\mathcal{D}$ et est aussi orthogonal à $\vec{n}_1$ (vérifiez!). Ainsi,

$$\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{n}_2 \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ sont deux vecteurs normaux à } \mathcal{D} \text{ et orthogonaux entre eux.}$$

Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n}_1 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n}_2 \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y-1+2z=0 \\ -5x-5-8y+8+4z=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z-1=0 \\ 5x+8y-4z-3=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\mathcal{D} : \begin{cases} y+2z-1=0 \\ 5x+8y-4z-3=0. \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1$, on retrouve les équations précédentes.

Méthode 3. On récupère les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ comme dans la méthode 2. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a les

équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y-1+2z=0 \\ 4z-x-1=0 \\ -2x-2-4y+4=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-4z+1=0 \\ -2x-4y+2=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-4z+1=0 \\ -4y-8z+4=0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-4z+1=0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1.
 \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\mathcal{D} : \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-4z+1=0. \end{cases}$$

2.3 Soient $A(0,1,2)$, $B(-1,0,1)$, $C(1,-1,-3)$. On observe que $A(0,1,2)$ est un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ou

$\overrightarrow{BA} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs **non colinéaires** et directeurs de $\mathcal{P}$. Par conséquent une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x=t+s \\ y=1+t-2s \\ z=2+t-5s \end{cases}.$$

Méthode 1. Soient $M(x,y,z) \in \mathcal{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x=t+s \\ y=1+t-2s \\ z=2+t-5s \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x=t+s \\ y-x=1-3s \\ z-x=2-6s \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x=t+s \\ y-x=1-3s \\ z-2y+x=0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
 &\Leftrightarrow \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t=x-s=x-\frac{1-y+x}{3} \\ s=\frac{1-y+x}{3} \\ z-2y+x=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow z-2y+x=0.
 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\mathcal{P} : x - 2y + z = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{P}.$$

Vérifiez que $\vec{n}$ est bien normal à $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

De plus, on a

$$\overrightarrow{BA} \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Posons $\vec{v} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Alors $\vec{v}$ est normal à $\vec{n}$ donc est un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ et $\vec{v}$ est normal à $\overrightarrow{BA}$ donc, en renormalisant,

$$\left(A(0, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \text{ forme un repère orthonormé de } \mathcal{P}.$$

Méthode 2. On a

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Posons $\vec{n} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Alors $\vec{n}$ est normal à $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ (deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$) donc

$$\vec{n} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ est un vecteur normal de } \mathcal{P}.$$

Puisque $A(0, 1, 2) \in \mathcal{P}$. Pour $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} & \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0 & \Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow -x + 2y - 2 - z + 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow x - 2y + z = 0. \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\mathcal{P} : x - 2y + z = 0.$$

De plus, on a

$$\overrightarrow{BA} \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Posons $\vec{v} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Alors $\vec{v}$ est normal à $\vec{n}$ donc est un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ et $\vec{v}$ est normal à $\overrightarrow{BA}$ donc, en renormalisant,

$$\left(A(0, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \text{ forme un repère orthonormé de } \mathcal{P}.$$

Méthode 3. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. Alors,

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z-2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -x+y-1 & 1 & -3 \\ -x+z-2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 & \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - xC_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow -\begin{vmatrix} -x+y-1 & -3 \\ -x+z-2 & -6 \end{vmatrix} = 0 & \text{en développant par rapport à } L_1 \\
 &\Leftrightarrow -(6x - 6y + 6 - 3x + 3z - 6) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3x - 6y + 3z = 0.
 \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$:

$$\boxed{\mathcal{P} : x - 2y + z = 0.}$$

On construit alors le repère orthonormé comme dans l'une des méthodes précédentes.

2.4 Soit $\mathcal{P} : x + 2y - 3z + 4 = 0$. On observe que

$$\boxed{\vec{n} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{P}.}$$

Méthode 1. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow x + 2y - 3z + 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -2y + 3z - 4 \\
 &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = -4 - 2t + 3s \\ y = t \\ z = s \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Donc une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : \begin{cases} x = 4 - 2t + 3s \\ y = t \\ z = s \end{cases}, (t, s) \in \mathbb{R}^2.}$$

En particulier $A(-4, 0, 0)$ est un point de $\mathcal{P}$ (vérifiez sur l'équation cartésienne) et $\vec{u} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ mais malheureusement non orthogonaux. On a cependant,

$$\vec{n} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Alors, $\vec{v}' \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n}$ et est donc un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ et il est aussi normal à $\vec{u}$. Or $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}'\| = \sqrt{9+36+25} = \sqrt{70}$. Conclusion,

$$\boxed{\left(A(-4, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \text{ forme un repère orthonormé de } \mathcal{P}.}$$

Méthode 2. On observe que $\vec{u} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n}$ et donc est un vecteur directeur de $\mathcal{P}$. On a de plus,

$$\vec{n} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Alors, $\vec{v} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n}$ et est donc un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ et il est aussi normal à $\vec{u}$ et non colinéaire à $\vec{u}$. Or $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{9+36+25} = \sqrt{70}$. D'autre part, on observe que $A(0, -2, 0)$ est un point de $\mathcal{P}$. Donc,

$$\left(A(0, -2, 0), \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \text{ forme un repère orthonormé de } \mathcal{P}.$$

On en déduit également l'équation paramétrique de $\mathcal{P}$ suivante :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = -2t + 3s \\ y = -2 + t + 6s \\ z = 5s \end{cases}, (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

2.5 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$.

Méthode 1. On a $\mathcal{D} : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$ donc $\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{n}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont des

vecteurs non colinéaires et normaux à $\mathcal{D}$ et $\vec{n}_1' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{n}_2' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs non colinéaires et normaux à $\mathcal{D}'$. On calcule alors

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_1' \wedge \vec{n}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\vec{u} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}' \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. D'autre part, $\mathcal{D}$ passe par $A(1, -1, 0)$ et $\mathcal{D}'$ par $A'(2, -3, 0)$ donc on obtient les équations paramétriques suivantes :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = t \end{cases}.$$

Méthode 2. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} & \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases} \\ M \in \mathcal{D}' & \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases} & \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t - 3 \\ z = t \end{cases}. \end{aligned}$$

On obtient alors les équations

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = t \end{cases}.$$

Pour l'intersection, deux méthodes. *Méthode 1.* Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \\ x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \\ 0 = -z + 1 \\ 0 = 2z - 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{(3, 0, 1)\} \neq \emptyset$. Conclusion,

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

Méthode 2. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \exists s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -3 + 3s \\ z = s \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 + 2t = 2 + s \\ -1 + t = -3 + 3s \\ t = s \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 + 2t = 2 + t \\ -1 + t = -3 + 3t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} t = 1 \\ 2t = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = -1 + 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{(3, 0, 1)\} \neq \emptyset$. Conclusion,

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

On sait (déjà vu ou alors par les équations paramétriques) que $\vec{u} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et

$\vec{u}' \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, $A(1, -1, 0)$ un point de $\mathcal{D}$ et $A'(2, -3, 0)$ de $\mathcal{D}'$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$

sont deux vecteurs de $\mathcal{P}$. De plus $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ **ne sont pas colinéaires** et ils engendrent donc $\mathcal{P}$. Comme $A \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}$, on en déduit l'équation paramétrique suivante :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 + 2t + s \\ y = -1 + t + 3s \\ z = t + s \end{cases}.$$

Pour l'équation cartésienne, trois méthodes. *Méthode 1.* On a

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Donc $\vec{n} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0 &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle = -2x + 2 - y - 1 + 5z = 0 \\ &&\Leftrightarrow 2x + y - 5z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\mathcal{P} : 2x + y - 5z - 1 = 0.$$

Méthode 2. Puisque $A(1, -1, 0) \in \mathcal{P}$ et que $\vec{u}(2, 1, 1)$ et $\vec{u}'(1, 3, 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires directeurs de $\mathcal{P}$, pour $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u}') = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3x+y+4 & -5 & 3 \\ -x+z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 &\begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - (x-1)C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3x+y+4 & -5 \\ -x+z+1 & -1 \end{vmatrix} = 0 &\text{en développant par rapport à } L_1 \\ &\Leftrightarrow 3x - y - 4 - 5x + 5z + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x - y + 5z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\mathcal{P} : 2x + y - 5z - 1 = 0.$$

Méthode 3. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 1 + 2t + s \\ y = -1 + t + 3s \\ z = t + s \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x - 2z = 1 - s \\ y - z = -1 + 2s \\ z = t + s \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x - 2z = 1 - s \\ 2x + y - 5z = 1 \\ z = t + s \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\
 &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x - 2z = 1 - s \\ z = t + s \\ 2x + y - 5z = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_3 \\
 &\Leftrightarrow \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} s = 1 - x + 2z \\ t = z - s = -1 + x - z \\ 2x + y - 5z = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow 2x + y - 5z - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : 2x + y - 5z - 1 = 0.}$$

3. Projeté orthogonal.

3.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ une droite de l'espace, $M(1, 2, 3)$ un point de l'espace.

Méthode 1. Soit $A(x, y, z) \in \mathcal{E}$ un point de l'espace. On a les équivalences suivantes :

$$A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}.$$

Donc $A(0, 1, 0)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Méthode 2. Les vecteurs $\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont normaux à $\mathcal{D}$. On a

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc $\vec{u} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. De plus on remarque que pour

$A(-1, 0, 1)$, on a $x - y = -1 - 0 = -1$ et $x - z = -1 + 1 = 0$ donc $A \in \mathcal{D}$.

Méthode 1. Avec H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, dans le triangle rectangle AMH , on sait que $\left| \sin(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) \right| = \frac{HM}{AM}$. Autrement dit,

$$d(M, \mathcal{D}) = HM = AM \left| \sin(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) \right| = \frac{\|\overrightarrow{AM}\| \|\vec{u}\| \left| \sin(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) \right|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

D'où,

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1-3 \\ 3-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{3}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+4}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Méthode 2. Par le théorème de Pythagore, on observe que

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{D})^2 &= \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \left\| \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \left(\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \right)^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|^2 - \left(\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right)^2 \\ &= 1+1+9 - \frac{(1+1+3)^2}{3} \\ &= 11 - \frac{25}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

De plus,

$$H = A + \frac{\langle \overrightarrow{AM} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1+1+3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \text{et} \quad H \begin{bmatrix} 5/3 \\ 8/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}.$$

3.2 Soient $A(0, 1, 0)$, $B(2, 3, -1)$ et $M(0, 0, 5/2)$ trois points de l'espace. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un

vecteur directeur de (AB) .

Méthode 1. Avec H le projeté orthogonal de M sur (AB) , dans le triangle rectangle AMH , on sait que $|\sin(\overrightarrow{AM}, \vec{u})| = \frac{HM}{AM}$. Autrement dit,

$$d(M, (AB)) = HM = AM |\sin(\overrightarrow{AM}, \vec{u})| = \frac{\|\overrightarrow{AM}\| \|\vec{u}\| |\sin(\overrightarrow{AM}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

D'où,

$$d(M, (AB)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5/2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1-5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|}{3} = \frac{\sqrt{16+25+4}}{3} = \frac{\sqrt{45}}{3} = \sqrt{5}.$$

Méthode 2. Par le théorème de Pythagore, on observe que

$$\begin{aligned} d(M, (AB))^2 &= \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \left\| \left\langle \overrightarrow{AM} \left| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \left(\left\langle \overrightarrow{AM} \left| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \right)^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5/2 \end{bmatrix} \right\|^2 - \left(\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5/2 \end{bmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \right)^2 \\ &= 1 + \frac{25}{4} - \frac{(-2 - \frac{5}{2})^2}{9} \\ &= \frac{29}{4} - \frac{81/4}{9} = \frac{29}{4} - \frac{9}{4} = 5. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d(M, \mathcal{D}) = \sqrt{5}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} H = A + \frac{\langle \overrightarrow{AM} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5/2 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-2 - \frac{5}{2}}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{On peut vérifier } HM = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = d(M, (AB)) \text{ OK!}$$

Conclusion,

$$d(M, (AB)) = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad H \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

3.3 Soient $\mathcal{P} : -3x + 2y + z + 7 = 0$ un plan de l'espace et $M(-7, 6, 2)$ un point de l'espace. Alors $\vec{n} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $A(0, 0, -7)$ est un point de $\mathcal{P}$. Donc

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{P}) &= \left\| \left\langle \overrightarrow{AM} \left| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{AM} \left| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{9+4+1}} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{|21 + 12 + 9|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{42}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{42\sqrt{14}}{14} \\ &= \frac{6\sqrt{14}}{2} \\ &= 3\sqrt{14}. \end{aligned}$$

De plus,

$$H = M \pm d(M, \mathcal{P}) \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \pm 3\sqrt{14} \times \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Or $-3(-16) + 2 \times 12 + 5 + 7 \neq 0$, donc $(-16, 12, 5) \notin \mathcal{P}$ et on a bien $-3 \times 2 - 1 + 7 = 0$. Conclusion,

$$d(M, \mathcal{P}) = 3\sqrt{14} \quad \text{et} \quad H \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3.4 Soient $\mathcal{P} : -4x + 2y - 3z - 5 = 0$ un plan de l'espace et $M(7, -5, 5)$ un point de l'espace. Le vecteur

$\vec{n} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ et $A(0, 1, -1)$ est un point de $\mathcal{P}$. Donc

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{P}) &= \left\| \left\langle \overrightarrow{AM} \left| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{AM} \left| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{16+4+9}} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{|-28 - 12 - 18|}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{58}{\sqrt{29}} \\ &= 2\sqrt{29}. \end{aligned}$$

De plus,

$$H = M \pm d(M, \mathcal{P}) \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \pm 2\sqrt{29} \times \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Or $-4 \times 15 + 2(-9) - 3 \times 11 - 5 = -60 - 18 - 33 - 5 \neq 0$ donc $(15, -9, 11) \notin \mathcal{P}$ et $-4 \times (-1) + 2 \times (-1) - 3 \times (-1) - 5 = 0$. Conclusion,

$$d(M, \mathcal{P}) = 2\sqrt{29} \quad \text{et} \quad H \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3.5 Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases}$ et $M(1, 0, 0)$.

Méthode 1. Soit $A(x, y, z) \in \mathcal{E}$ un point de l'espace. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ -y + z = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y + 3z = 1 - y + 3 + 3y = 4 + 2y \\ z = 1 + y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $A(4, 0, 1)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Méthode 2. Les vecteurs $\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ sont normaux à $\mathcal{D}$. On a

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Donc $\vec{u} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. De plus on remarque que pour

$A(1, -2, 0)$, on a $x + y - 3z = 1 - 2 = -1$ et $2x + y - 5z = 2 - 2 = 0$ donc $A \in \mathcal{D}$.

Méthode 1. Avec H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, dans le triangle rectangle AMH , on sait que $|\sin(\vec{AM}, \vec{u})| = \frac{HM}{AM}$. Autrement dit,

$$d(M, \mathcal{D}) = HM = AM |\sin(\vec{AM}, \vec{u})| = \frac{\|\vec{AM}\| \|\vec{u}\| |\sin(\vec{AM}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

D'où,

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Méthode 2. Par le théorème de Pythagore, on observe que

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{D})^2 &= \|\vec{AM}\|^2 - \left\| \left\langle \vec{AM} \left| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\|^2 \\ &= \|\vec{AM}\|^2 - \left(\left\langle \vec{AM} \left| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \right)^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 - \left(\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{4+1+1}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right)^2 \\ &= 4 - \frac{(2)^2}{6} \\ &= 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

De plus,

$$H = A + \frac{\langle \vec{AM} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que $HM = \left\| \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{4+25+1}}{3} = \frac{\sqrt{30}}{3} = d(M, \mathcal{D})$ OK!

Conclusion,

$$\boxed{d(M, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{30}}{3} \quad \text{et} \quad H \begin{bmatrix} 5/3 \\ -5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

4. Intersection.

4.1 Soient $A(1, 2, -3)$, $B(-1, 2, 0)$ et $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 2 = 0$. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) . Donc des équations paramétriques de (AB) sont

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On a

$$\begin{aligned} M \in (AB) \cap \mathcal{P} &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R}, x = 1 - 2t, y = 2, z = -3 + 3t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - 2t, y = 2, z = -3 + 3t \\ 2(1 - 2t) - 2 + 3(-3 + 3t) - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - 2t, y = 2, z = -3 + 3t \\ 2 - 4t - 2 - 9 + 9t - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - 2t, y = 2, z = -3 + 3t \\ 5t = 11 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 1 - 2 \times \frac{11}{5}, y = 2, z = -3 + 3 \times \frac{11}{5} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{17}{5}, y = 2, z = \frac{-15 + 33}{5} = \frac{18}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion, il existe un unique point d'intersection donné par

$$\boxed{M(-17/5, 2, 18/5)}.$$

4.2 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - 3z = 2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 5z = -6 \end{cases}$.

Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - 3z = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 7y - 6z = -7 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2y - z = 3 + \frac{12}{7}z - 2 - z = 1 + \frac{5}{7}z \\ y = \frac{6}{7}z - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -1 + 6t \\ z = 7t. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $A(1, -1, 0)$ un point de $\mathcal{D}$.

On vérifie que A vérifie les équations de $\mathcal{D}$ et que $\vec{u}$ est bien orthogonal à $\vec{n}_1(1, -2, 1)$ et $\vec{n}_2(3, 1, -3)$.

De même pour $\mathcal{D}'$, soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}' &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 5z = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 4 \\ -2y - 4z = -10 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 4 - y + z = 4 + 2z - 5 + z = -1 + 3z \\ y = -2z + 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = t. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}' \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ et $A'(-1, 5, 0)$ un point de $\mathcal{D}'$.

On vérifie que A' vérifie les équations de $\mathcal{D}$ et que $\vec{u}'$ est bien orthogonal à $\vec{n}_1'(1, 1, -1)$ et $\vec{n}_2'(1, -1, -5)$.
Par suite on observe que

$$\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sont coplanaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}') = 0.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}') &= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ &= 7 \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -14 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \text{en développant par rapport à } C_1 \\ &= -14(3 - 7) \\ &= 56 \neq 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

4.3 Soient $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(1, -1, 0)$ et dirigé par $\vec{u}(2, 1, -1)$ et $\vec{v}(1, 4, 1)$ et le plan $\mathcal{P}'$ passant par $B(1, 2, 1)$, $C(1, 4, 0)$ et $E(1, -1, 3)$. Commençons par déterminer des équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Méthode 1. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 4 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2y-3 & 0 & -7 \\ y+1 & 1 & 4 \\ y+z+1 & 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \\ &\Leftrightarrow +1 \begin{vmatrix} x-2y-3 & -7 \\ y+z+1 & 5 \end{vmatrix} & \text{en développant par rapport à } C_2 \\ &\Leftrightarrow 5x - 10y - 15 + 7y + 7z + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 3y + 7z = 8. \end{aligned}$$

Méthode 2. Soit $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. On a

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$\vec{n}$ est un vecteur normal. Dès lors pour $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 5 - 3y - 3 + 7z = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 3y + 7z = 8. \end{aligned}$$

Méthode 3. Avec le même vecteur $\vec{n} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{P} : 5x - 3y + 7z = d$. Or $A(1, -1, 0) \in \mathcal{P}$ donc

$$d = 5 + 3 = 8.$$

D'où

$$\mathcal{P} : 5x - 3y + 7z = 8.$$

On procède de même pour $\mathcal{P}'$.

Méthode 1. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y-2 & 2 & -3 \\ z-1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow + (x-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} && \text{en développant par rapport à } L_1 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(4-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Méthode 2. Soit $\vec{n}' = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}$. On a

$$\vec{n}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\vec{n}'$ est un vecteur normal. Dès lors pour $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{BM} | \vec{n}' \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Méthode 3. Avec le même vecteur $\vec{n}' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{P}' : x = d$. Or $B(1, 2, 1) \in \mathcal{P}'$ donc

$$d = 1$$

D'où

$$\mathcal{P}' : x = 1.$$

Puisque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, on note que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles et donc sont sécants et s'intersectent en une droite. Posons $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. On a directement :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} 5x - 3y + 7z = 8 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Méthode 1. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y + 7z = 8 \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 7z = 3 \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + \frac{7}{3}z \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc des équations paramétriques de $\mathcal{D}$ sont

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2. On note que $\vec{n}_1(5, -3, 7)$ et $\vec{n}_2(1, 0, 0)$ sont deux vecteurs normaux non colinéaires de $\mathcal{D}$. Posons $\vec{w} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$. On a

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{w}(0, 7, 3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. De plus, on observe que $F(1, -1, 0)$ vérifie $x = 1$ et $5x - 3y + 7z = 5 + 3 = 8$. Donc $F \in \mathcal{D}$. Conclusion,

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4.4 Calculons la distance de $\Omega(1, -2, 3)$ à $\mathcal{P} : x + y + z = -4$. On note que $\vec{n}(1, 1, 1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $A(-4, 0, 0) \in \mathcal{P}$. Par suite,

$$\begin{aligned} d(\Omega, \mathcal{P}) &= \left\| \left\langle \overrightarrow{A\Omega}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{A\Omega}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{|5 - 2 + 3|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dès lors pour être tangente à $\mathcal{P}$, la sphère a pour rayon $R = 2\sqrt{3}$. Ainsi, son équation cartésienne est donnée par

$$\mathcal{S} : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 12.$$

4.5 Soient $\mathcal{P} : 3x + 4z = -1$ et $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(2, -1, 1)$ et de rayon $R = 3$. Notons $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$. On note que

$$\mathcal{S} : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9.$$

On note que $\vec{n}(3, 0, 4)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $A(1, 0, -1) \in \mathcal{P}$. On calcule alors,

$$\begin{aligned} d(\Omega, \mathcal{P}) &= \left\| \left\langle \overrightarrow{A\Omega} \left| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{A\Omega} \left| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{9+16}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{|3+8|}{5} \\ &= \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

Puisque $d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{11}{5} < \frac{15}{5} = 3 = R$, on en déduit que $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est bien un cercle dont le centre est donné par H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned} H &= \Omega + \left\langle \overrightarrow{\Omega A} \left| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right. \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \left| \frac{1}{\sqrt{9+16}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{9+16}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right. \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-3-8}{25} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \left(\begin{bmatrix} 50 \\ -25 \\ 25 \end{bmatrix} - 11 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 17 \\ -25 \\ -19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Soit $B \in \mathcal{C}$. On observe que le triangle $BH\Omega$ est rectangle en H . Donc par le théorème de Pythagore,

$$r^2 = HB^2 = B\Omega^2 - H\Omega^2 = R^2 - d(\Omega, \mathcal{P})^2 = 9 - \frac{121}{25} = \frac{225 - 121}{25} = \frac{104}{25} = \frac{4 \times 26}{25}.$$

Donc le rayon du cercle est de $\frac{2\sqrt{26}}{5}$. Conclusion,

$$\mathcal{C} \text{ est un cercle de centre } H(17/25, -1, -19/25) \text{ et de rayon } r = \frac{2\sqrt{26}}{5}.$$

5. Calculer un déterminant.

5.1 On remarque que A possède une colonne nulle ! Donc $\det(A) = 0$ et la matrice A n'est donc pas inversible.

5.2 Le parallélépipède est engendré par $\overrightarrow{AB}(0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AD}(1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{AE}(1, 1, 0)$. Donc son volume est donné par $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})|$. Or

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \text{en développant par rapport à la première ligne} \\ &= -(-1 - 1) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = |2| = 2.$$

5.3 Par développement par rapport à la première ligne, on observe que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^n a_0 \det(I_{n-1}) = (-1)^n a_0.$$

Conclusion, $\boxed{\det(A) = (-1)^n a_0}$. En particulier, $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } a_0 \neq 0}$.

5.4 Calculons,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -11 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la première ligne} \\ &= 42 - 33 = 9. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\det(A) = 9 \neq 0} \quad \text{donc } A \text{ est inversible.}$$

5.5 Par opérations élémentaires, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

Par développement par rapport à la première colonne puis la première ligne,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3(6 - 2) + 2(-4 + 3) = -12 - 2 = -14.$$

Conclusion, $\boxed{\det(A) = -14 \neq 0}$. En particulier, $\boxed{A \text{ est inversible}}$.