Interrogation 6 d'entrainement
Calcul algébrique

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.
   1.2 Donner la somme géométrique.
   1.3 Enoncer la formule de Bernoulli.
   1.4 Enoncer la formule du binôme de Newton.
   1.5 Définir le coefficient binomial.
   1.6 Enoncer la formule de Pascal.
2. **Reconnaitre une somme usuelle.**
   2.1 Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+2} - a_k)$.
   2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.
   2.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)$.
   2.4 Soit $(s, b) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $S_s = \displaystyle\sum_{u=2}^{s} \binom{s}{u} (3 \times 5^u)^b$.
   2.5 Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=-2}^{n} (k + a)^3$.
3. **Savoir faire un changement d'indice.**
   3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2n - 4 + k)$. *Mettre le résultat sous forme de factoriels.*
   3.2 Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{100} \left(\sqrt{102 - k} - \sqrt{k}\right)$.
   3.3 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+p}{k} = \sum_{k=p}^{n+p} \binom{n+p}{k}$.
   3.4 Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, $p \geqslant m + 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{p-m} \mathrm{e}^{\pi(n+m)^2} - \sum_{k=m}^{p-1} \mathrm{e}^{\pi k^2}$.
   3.5 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p \geqslant 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} [\sin(k + p) - \sin(k)] = \sum_{k=0}^{p-1} [\sin(k + n + 1) - \sin(k)]$.
   Séparer la somme en deux et commencer par imiter la démonstration du calcul de la somme télescopique.

4. **Sommes doubles rectangulaires.**

   4.1 Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer $S_{n,m} = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} (2i-j)$.

   4.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij^3$.

   4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+2j)^3$.

   4.4 Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer $S_{n,m} = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \binom{n}{i}\binom{m}{j}\left(3^i+5^j\right)$.

   4.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} \cos\left((l+k)\frac{\pi}{3}\right)$.

5. **Sommes doubles triangulaires.**

   5.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j-1}$.

   5.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (n-i)\,j$.

   5.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$.

   5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} q^{i+j}$.

   5.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i^2}{2j-1}$.