

Correction de l'interrogation 6

d'entraînement

Calcul algébrique

1. Restituer le cours.

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

1.2 Soient $q \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. On a

$$\sum_{k=m}^n q^k = \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n - m + 1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

1.3 Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

1.4 Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1.5 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in \llbracket 0; n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.6 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Reconnaître une somme usuelle.

2.1 Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+2} - a_k) = \sum_{k=0}^n (a_{k+2} - a_{k+1} + a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^n (a_{k+2} - a_{k+1}) + \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k).$$

On reconnaît alors deux sommes télescopiques. Donc

$$S_n = a_{n+2} - a_1 + a_{n+1} - a_0.$$

Conclusion,

$$S_n = a_{n+2} + a_{n+1} - a_1 - a_0.$$

2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On a les égalités suivantes :

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}.$$

On reconnaît alors un produit télescopique. Par conséquent

$$P_n = \frac{1}{n}.$$

2.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{\cos\left(k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\cos(k) - \cos(k+1)}{2}$.
On obtient donc une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} (\cos(k) - \cos(k+1)) = \frac{1}{2} (\cos(0) - \cos(n+2)).$$

Conclusion,

$$S_n = \frac{1 - \cos(n+2)}{2}.$$

2.4 Soit $(s, b) \in \mathbb{N}^2$. On a les égalités suivantes :

$$S_s = \sum_{u=2}^s \binom{s}{u} (3 \times 5^u)^b = \sum_{u=2}^s \binom{s}{u} \underbrace{3^b}_{\text{indépendant de } u} \times 5^{ub} = 3^b \sum_{u=2}^s \binom{s}{u} (5^b)^u \times 1^{s-u}.$$

On reconnaît alors un binôme de Newton :

$$\begin{aligned} S_s &= 3^b \left(\sum_{u=0}^s \binom{s}{u} (5^b)^u \times 1^{s-u} - \binom{s}{0} (5^b)^0 - \binom{s}{1} (5^b)^1 \right) \\ &= 3^b \left((5^b + 1)^s - 1 - s5^b \right) \\ &= 3^b (5^b + 1)^s - 3^b - s15^b. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_s = 3^b (5^b + 1)^s - 3^b - s15^b.$$

2.5 Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=-2}^n (k+a)^3 \\ &= \sum_{k=-2}^n (k^3 + 3ak^2 + 3a^2k + a^3) \\ &= \sum_{k=0}^n (k^3 + 3ak^2 + 3a^2k + a^3) + (-1)^3 + 3a(-1)^2 + 3a^2(-1) + a^3 \\ &\quad + (-2)^3 + 3a(-2)^2 + 3a^2(-2) + a^3 \\ &= \sum_{k=0}^n k^3 + 3a \sum_{k=0}^n k^2 + 3a^2 \sum_{k=0}^n k + a^3 \sum_{k=0}^n 1 - 1 + 3a - 3a^2 + a^3 - 8 + 12a - 6a^2 + a^3 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 3a \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3a^2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)a^3 - 9 + 15a - 9a^2 + 2a^3 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - 9 + \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + 15 \right) a + \left(\frac{3n(n+1)}{2} - 9 \right) a^2 + (n+3)a^3.$$

3. Savoir faire un changement d'indice.

3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons le glissement d'indice $\tilde{k} = 2n - 4 + k$, on a :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^n (2n - 4 + k) = \prod_{\tilde{k}=2n-4}^{3n-4} \tilde{k} = \prod_{k=2n-4}^{3n-4} k \quad \text{car l'indice de sommation est muet.} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{3n-4} k}{\prod_{k=1}^{2n-5} k} = \frac{(3n-4)!}{(2n-5)!}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$P_n = \frac{(3n-4)!}{(2n-5)!}.$$

3.2 Tout d'abord, on a

$$S = \sum_{k=0}^{100} (\sqrt{102-k} - \sqrt{k}) = \sum_{k=0}^{100} \sqrt{102-k} - \sum_{k=0}^{100} \sqrt{k}.$$

On effectue l'inversion d'indice $\tilde{k} = 102 - k$ dans la première somme. On obtient alors

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\tilde{k}=2}^{102} \sqrt{\tilde{k}} - \sum_{k=0}^{100} \sqrt{k} = \sum_{k=2}^{102} \sqrt{k} - \sum_{k=0}^{100} \sqrt{k} && \text{car l'indice de sommation est muet} \\ &= \sqrt{102} + \sqrt{101} + \sum_{k=2}^{100} \sqrt{k} - \sum_{k=2}^{100} \sqrt{k} - \sqrt{1} - \sqrt{0} \\ &= \sqrt{102} + \sqrt{101} - 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S = \sqrt{102} + \sqrt{101} - 1.$$

3.3 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On n'effectue pas pas de glissement d'indice mais l'inversion d'indice suivante : $\tilde{k} = n+p-k$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n+p}{k} &= \sum_{\tilde{k}=p}^{n+p} \binom{n+p}{n+p-\tilde{k}} = \sum_{k=p}^{n+p} \binom{n+p}{n+p-k} && \text{car l'indice de sommation est muet} \\ &= \sum_{k=p}^{n+p} \binom{n+p}{n+p-(n+p-k)} \\ &= \sum_{k=p}^{n+p} \binom{n+p}{k}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+p}{k} = \sum_{k=p}^{n+p} \binom{n+p}{k}.$$

3.4 Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, $p \geq m + 1$. On effectue le glissement d'indice $\tilde{n} = n + m$:

$$\sum_{n=0}^{p-m} e^{\pi(n+m)^2} = \sum_{\tilde{n}=m}^p e^{\pi(\tilde{n})^2} = \sum_{k=m}^p e^{\pi k^2} \quad \text{car l'indice de sommation est muet.}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{p-m} e^{\pi(n+m)^2} - \sum_{k=m}^{p-1} e^{\pi k^2} = \sum_{k=m}^p e^{\pi k^2} - \sum_{k=m}^{p-1} e^{\pi k^2} = e^{\pi p^2}.$$

Conclusion,

$$\sum_{n=0}^{p-m} e^{\pi(n+m)^2} - \sum_{k=m}^{p-1} e^{\pi k^2} = e^{\pi p^2}.$$

3.5 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq p \geq 1$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n [\sin(k+p) - \sin(k)]$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k+p) - \sum_{k=0}^n \sin(k).$$

On effectue le glissement d'indice $\tilde{k} = k + p$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{\tilde{k}=p}^{n+p} \sin(\tilde{k}) - \sum_{k=0}^n \sin(k) \\
 &= \sum_{k=p}^{n+p} \sin(k) - \sum_{k=0}^n \sin(k) \quad \text{car l'indice de sommation est muet} \\
 &= \sum_{k=p}^n \sin(k) + \sum_{k=n+1}^{n+p} \sin(k) - \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k) - \sum_{k=p}^n \sin(k) \quad \text{par la relation de Chasles} \\
 &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \sin(k) - \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k).
 \end{aligned}$$

On effectue alors un nouveau glissement d'indice $\tilde{k} = k - n - 1$ dans la première somme :

$$S_n = \sum_{\tilde{k}=0}^{p-1} \sin(\tilde{k} + n + 1) - \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k) = \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k + n + 1) - \sum_{k=0}^{p-1} \sin(k).$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^n [\sin(k+p) - \sin(k)] = \sum_{k=0}^{p-1} [\sin(k+n+1) - \sin(k)]}.$$

4. Sommes doubles rectangulaires.

4.1 Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Méthode 1. On a

$$\begin{aligned}
 S_{n,m} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (2i - j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (2i - j) \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(2 \sum_{i=1}^n i - j \sum_{i=1}^n 1 \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(2 \frac{n(n+1)}{2} - nj \right) \\
 &= n(n+1) \sum_{j=1}^m 1 - n \sum_{j=1}^m j \\
 &= mn(n+1) - n \frac{m(m+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_{n,m} = nm \frac{2n - m + 1}{2}}.$$

Méthode 2. On a

$$\begin{aligned}
 S_{n,m} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (2i - j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (2i - j) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(2i \sum_{j=1}^m 1 - \sum_{j=1}^m j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(2mi - \frac{m(m+1)}{2} \right) \\
 &= 2m \sum_{i=1}^n i - \frac{m(m+1)}{2} \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= 2m \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} n.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_{n,m} = nm \frac{2n - m + 1}{2}.$$

4.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On est dans le cas où les variables sont séparées. On a donc :

$$S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j^3 \right) = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Conclusion,

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^3.$$

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$(i + 2j)^3 = i^3 + 3i^2(2j) + 3i(2j)^2 + (2j)^3 = i^3 + 6i^2j + 12ij^2 + 8j^3.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + 2j)^3 \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i^3 + 6i^2j + 12ij^2 + 8j^3) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} i^3 + 6 \sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2j + 12 \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij^2 + 8 \sum_{1 \leq i, j \leq n} j^3 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n i^3 \right) \left(\sum_{j=1}^n 1 \right) + 6 \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) + 12 \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j^2 \right) + 8 \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) \left(\sum_{j=1}^n j^3 \right) \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 n + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{n(n+1)}{2} + 12 \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 8n \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \\ &= n^2(n+1)^2 \left[\frac{n}{4} + \frac{2n+1}{2} + 2n + 1 + 2n \right] \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} [n + 4n + 2 + 8n + 4 + 8n] \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2(21n+6)}{4}.$$

4.4 Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a, en utilisant à plusieurs reprises la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} S_{n,m} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \binom{n}{i} \binom{m}{j} (3^i + 5^j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\binom{n}{i} \binom{m}{j} 3^i + \binom{n}{i} \binom{m}{j} 5^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} 3^i \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} + \binom{n}{i} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} 5^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} 3^i \left[\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} - 1 \right] + \binom{n}{i} \left[\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} 5^j - 1 \right] \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} 3^i [(1+1)^m - 1] + \binom{n}{i} [(5+1)^m - 1] \right) \\ &= (2^m - 1) \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 3^i + (6^m - 1) \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \\ &= (2^m - 1) ((3+1)^n - 1) + (6^m - 1) ((1+1)^n - 1). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_{n,m} = (2^m - 1)(4^n - 1) + (6^m - 1)(2^n - 1).$$

4.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On a

$$S_n = \sum_{1 \leq k, l \leq n} \cos\left((l+k)\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} \operatorname{Re}\left(e^{i(l+k)\frac{\pi}{3}}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{1 \leq k, l \leq n} e^{il\frac{\pi}{3}} e^{ik\frac{\pi}{3}}\right)$$

Les variables étant séparées,

$$S_n = \operatorname{Re}\left[\left(\sum_{k=1}^n e^{ik\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sum_{l=1}^n e^{il\frac{\pi}{3}}\right)\right].$$

L'indice de sommation étant muet, on peut également écrire que

$$S_n = \operatorname{Re}\left[\left(\sum_{l=1}^n e^{il\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sum_{l=1}^n e^{il\frac{\pi}{3}}\right)\right] = \operatorname{Re}\left[\left(\sum_{l=1}^n e^{il\frac{\pi}{3}}\right)^2\right].$$

On reconnaît à l'intérieur une somme géométrique de raison $q = e^{i\frac{\pi}{3}} \neq 1$. L'indice commençant en 1, on a (*Rappel somme géométrique = premier terme $\times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$*)

$$S_n = \operatorname{Re}\left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}} \frac{1 - e^{in\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^2\right]$$

Par la factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned} S_n &= \operatorname{Re}\left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}} \frac{e^{in\frac{\pi}{6}} e^{-in\frac{\pi}{6}} - e^{in\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{6}} e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^2\right] \\ &= \operatorname{Re}\left[\left(e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}} \frac{-2i \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2\right] \\ &= \operatorname{Re}\left[e^{i(n+1)\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right]. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_n = 4 \cos\left((n+1)\frac{\pi}{3}\right) \sin^2\left(n\frac{\pi}{6}\right).$$

5. Sommes doubles triangulaires.

5.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j-1} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j-1} \\ &= \sum_{j=2}^n \frac{1}{j-1} \sum_{i=1}^{j-1} i \\ &= \sum_{j=2}^n \frac{1}{j-1} \frac{(j-1)j}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n j. \end{aligned}$$

On pose $k = j - 1$ on peut aussi se contenter d'ajouter/enlever le premier terme puis de factoriser le résultat obtenu mais connaissant votre goût pour le changement d'indice je prends cette dernière méthode). Alors

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)n}{2} + n-1 \right) = \frac{(n-1)(n+2)}{4}.$$

Conclusion,
$$S_n = \frac{(n-1)(n+2)}{4}.$$

5.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre entiers suivantes :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-i)j = \sum_{j=2}^n j \sum_{i=1}^{j-1} (n-i) \\
 &= \sum_{j=2}^n j \left(n(j-1) - \frac{(j-1)j}{2} \right) \\
 &= \sum_{j=2}^n j(j-1) \frac{2n-j}{2}
 \end{aligned}$$

On pose $k = j - 1$ on peut toujours se contenter d'ajouter/enlever le premier terme puis de factoriser le résultat obtenu). On a alors,

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)k \frac{2n-k-1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k)(2n-k-1) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} [(2n-1)k^2 + (2n-1)k - k^3 - k^2] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} [(2n-2)k^2 + (2n-1)k - k^3] \\
 &= \frac{1}{2} \left[(2n-2) \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (2n-1) \frac{(n-1)n}{2} - \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{(n-1)n}{24} [4(n-1)(2n-1) + 6(2n-1) - 3(n-1)n] \\
 &= \frac{(n-1)n}{24} [8n^2 - 12n + 4 + 12n - 6 - 3n^2 + 3n] \\
 &= \frac{(n-1)n}{24} [5n^2 + 3n - 2].
 \end{aligned}$$

On remarque que -1 est une racine de $5x^2 + 3x - 2$. Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{(n-1)n(n+1)(5n-2)}{24}}$$

5.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre entiers suivantes :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j ij = \sum_{j=1}^n j \frac{j(j+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j^3 + j^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
 &= \frac{n(n+1)}{24} [3n^2 + 3n + 4n + 2].
 \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x \mapsto 3x^2 + 7x + 2$. On a $\Delta = 49 - 24 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{-7-5}{6} = -2$ et $\frac{-7+5}{6} = -\frac{1}{3}$. On obtient donc la factorisation suivante :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)3\left(n+\frac{1}{3}\right)(n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{24}}$$

5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} q^{i+j} = \sum_{j=1}^n q^j \sum_{i=1}^j q^i.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $q \neq 1$. Donc

$$S_n = \sum_{j=1}^n q^j q \frac{q^j - 1}{q - 1} = \frac{q}{q - 1} \sum_{j=1}^n q^{2j} - \frac{q}{q - 1} \sum_{j=1}^n q^j$$

On reconnaît à nouveau des sommes géométriques de raison $q^2 \neq 1$ et $q \neq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{q}{q - 1} q^2 \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} - \frac{q}{q - 1} q \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= \frac{q^2}{(q - 1)^2 (q + 1)} (q^{2n+1} - q - (q + 1)(q^n - 1)) \\ &= \frac{q^2}{(q - 1)^2 (q + 1)} (q^{2n+1} - q^{n+1} - q^n + 1) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_n = \frac{q^2 (q^{2n+1} - q^{n+1} - q^n + 1)}{(q - 1)^2 (q + 1)}.$$

On peut vérifier son résultat en prenant $n = 1$.

5.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i^2}{2j - 1} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{2j - 1} \sum_{i=1}^{j-1} i^2 \\ &= \sum_{j=2}^n \frac{1}{2j - 1} \frac{(j - 1)j(2j - 1)}{6} \\ &= \sum_{j=2}^n \frac{j^2 - j}{6} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=2}^n j^2 - \frac{1}{6} \sum_{j=2}^n j \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} - 1 - \frac{n(n + 1)}{2} + 1 \right] \\ &= \frac{n(n + 1)}{36} [2n + 1 - 3]. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_n = \frac{n(n + 1)(n - 1)}{18}.$$