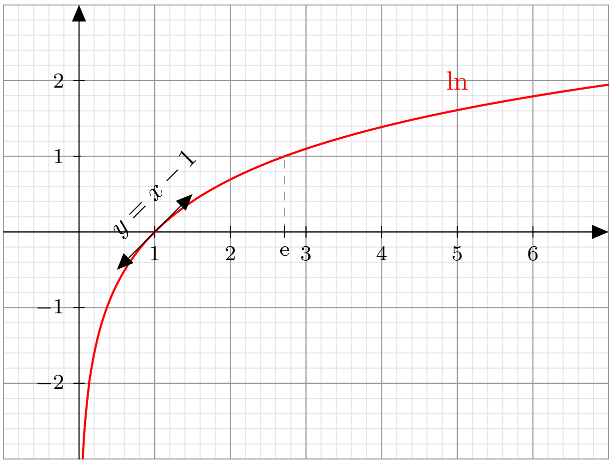
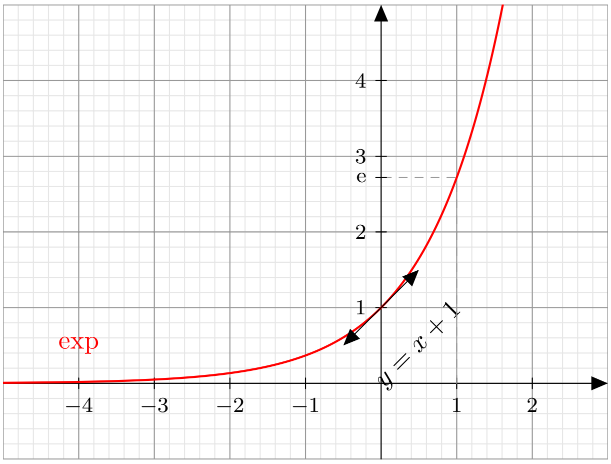
Correction de l'interrogation 7 d'entrainement
Fonctions usuelles

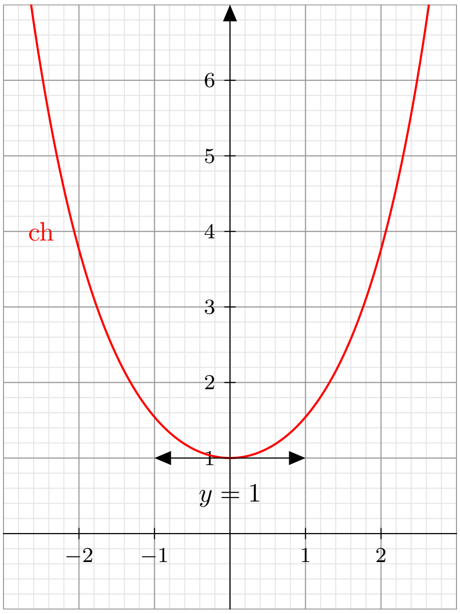
1. **Restituer le cours.**

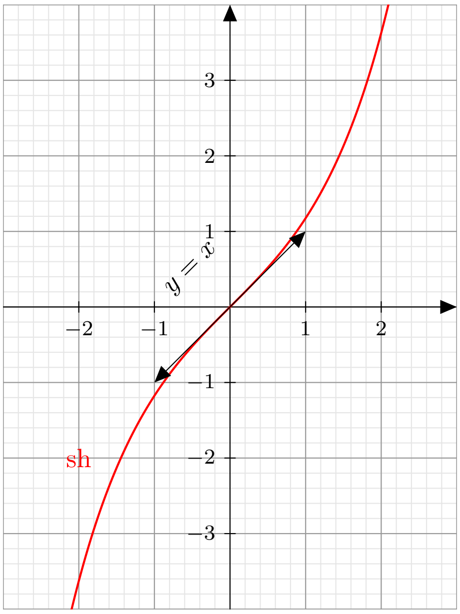
   1.1 Les fonctions logarithme et exponentielle :



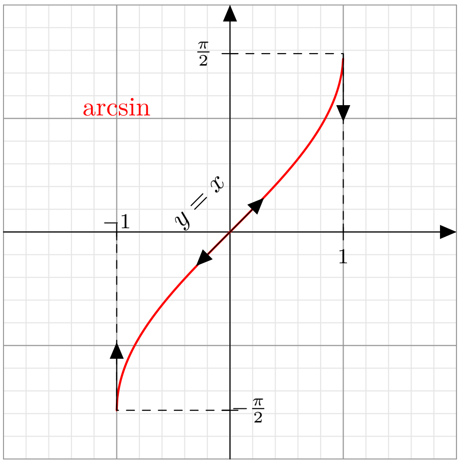


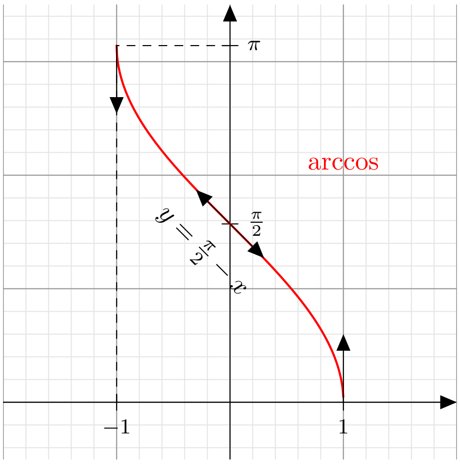
Les fonctions hyperboliques :

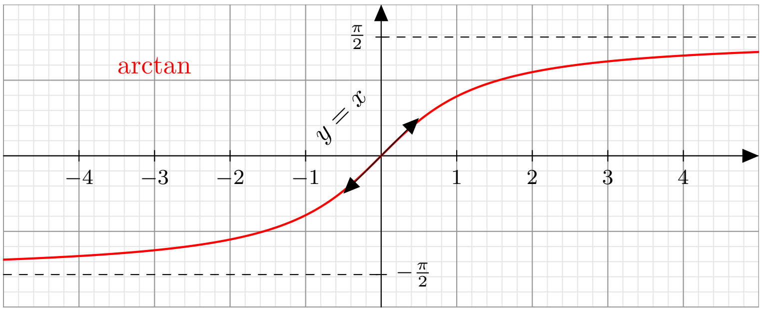




Les fonctions circulaires réciproques :







1.2
- Soient $a>0$ et $b>0$. On a
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^b\left|\ln(x)\right|^a=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^a(x)}{x^b}=0.$$
- Soient $a>0$ et $b>0$. On a
$$\lim_{x\to-\infty}|x|^b\,\mathrm{e}^{ax}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b}=+\infty.$$

1.3
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp'(x)=\exp(x)$.
- La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.
- La fonction cosinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x)$.
- La fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)$.
- La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x\in]-1;1[$, $\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x\in]-1;1[$, $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

1.4 On a les relations suivantes :
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$
- $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$
- $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$, $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$

2. **Manipuler les fonctions logarithme et exponentielle.**

2.1 Tous les nombres étant strictement positifs, on a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned}\ln\left(\left(\sqrt{7}\right)^{3/2}\sqrt[5]{2}\right)+\ln\left(\left(\frac{16}{7^{1/3}}\right)^{3/4}\right)&=\ln\left(7^{3/4}2^{1/5}\right)+\ln\left(\frac{16^{3/4}}{7^{1/4}}\right)\\&=\frac{3}{4}\ln(7)+\frac{1}{5}\ln(2)+\ln\left(\frac{2^3}{7^{1/4}}\right)\\&=\frac{3}{4}\ln(7)+\frac{1}{5}\ln(2)+3\ln(2)-\frac{1}{4}\ln(7)\quad=\frac{1}{2}\ln(7)+\frac{16}{5}\ln(2).\end{aligned}$$

Conclusion,
$$\boxed{\ln\left(\left(\sqrt{7}\right)^{3/2}\sqrt[5]{2}\right)+\ln\left(\left(\frac{16}{7^{1/3}}\right)^{3/4}\right)=\frac{1}{2}\ln(7)+\frac{16}{5}\ln(2).}$$

2.2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Surtout on ne développe pas le logarithme de la somme sur lequel on ne peut rien dire. Reconnaissant une somme géométrique de raison $3\neq 1$, on a écrit plutôt,
$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n}3^k\right)=\ln\left(3\frac{3^n-1}{3-1}\right)=\ln\left(3\frac{3^n-1}{2}\right)=\ln(3)+\ln\left(3^n-1\right)-\ln(2).$$

Conclusion,
$$\boxed{\ln\left(\sum_{k=1}^{n}3^k\right)=\ln(3)+\ln\left(3^n-1\right)-\ln(2).}$$

2.3 Soit $f : x \mapsto \ln(2) + \ln(\tan(x)) - \ln(1+\tan(x)) - \ln(1-\tan(x))$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tan(x) \text{ existe} \\ \tan(x) > 0 \\ 1+\tan(x) > 0 \\ 1-\tan(x) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tan(x) \text{ existe} \\ 1 > \tan(x) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]0+k\pi\,;\, \frac{\pi}{4}+k\pi\right[. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition de f est

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi\,;\, \frac{\pi}{4}+k\pi\right[.}$$

De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a

$$f(x) = \ln\left(\frac{2\tan(x)}{(1+\tan(x))(1-\tan(x))}\right) = \ln\left(\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}\right) = \ln(\tan(2x)).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi\,;\, \frac{\pi}{4}+k\pi\right[, \qquad f(x) = \ln(\tan(2x)).}$$

Attention : vous noterez que la fonction $x \mapsto \ln(\tan(2x))$ *est définie sur un domaine plus grand que* $\mathscr{D}_f$ *:* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{k\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right[$ *cela provient du fait que* $\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ *peut être strictement positif lorsque les deux facteurs sont strictement négatifs. Dans ce cas l'égalité*

$$\ln\left(\frac{2\tan(x)}{(1+\tan(x))(1-\tan(x))}\right) = f(x)$$

est fausse mais devient

$$\ln\left(\frac{2\tan(x)}{(1+\tan(x))(1-\tan(x))}\right) = \ln(2) + \ln(|\tan(x)|) - \ln(|1+\tan(x)|) - \ln(|1-\tan(x)|).$$

2.4 Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{(4x-1)^{1/3}}{\sin^2(x)}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x-1 > 0 \\ \sin^2(x) \neq 0 \\ \frac{(4x-1)^{1/3}}{\sin^2(x)} > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x \not\equiv 0 \ [\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \left]\frac{1}{4}\,;\, +\infty\right[\setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}^*\}.}$$

De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\ln(4x-1) - \ln\left(\sin^2(x)\right) \qquad \text{car } x > \frac{1}{4} \text{ et } \sin^2(x) > 0 \\ &= \frac{1}{3}\ln(4x-1) - 2\ln(|\sin(x)|). \end{aligned}$$

Attention $\sin(x)$ n'est pas nécessairement positif !!! Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = \frac{1}{3}\ln(4x-1) - 2\ln(|\sin(x)|).}$$

2.5 On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{ch}(u) > 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\mathrm{ch}(2x) - 1 > 0$. Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(2x) - 1) \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \ln\left(\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) - 1\right) = \ln\left(2\,\mathrm{sh}^2(x)\right) = \ln(2) + 2\ln(|\mathrm{sh}(x)|).$$

NB : en particulier, on peut écrire

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2) + 2\ln(\mathrm{sh}(x)) & \text{si } x > 0 \\ \ln(2) + 2\ln(-\mathrm{sh}(x)) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \ln(2) + 2\ln(|\mathrm{sh}(x)|).}$$

2.6 On a

$$\left(\mathrm{e}^2\right)^{4\ln(2)}\left(\left(\mathrm{e}^{-3}\right)^{\ln(2)}\right)^2 = \mathrm{e}^{8\ln(2)}\,\mathrm{e}^{-6\ln(2)} = \mathrm{e}^{2\ln(2)} = \mathrm{e}^{\ln(4)} = 4.$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(\mathrm{e}^2\right)^{4\ln(2)}\left(\left(\mathrm{e}^{-3}\right)^{\ln(2)}\right)^2 = 4.}$$

2.7 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{\cos^2(x)}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{-\sin^2(x)}}\right)^7}{\left(\mathrm{e}^{3^2}\right)^2} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\cos^2(x)+\sin^2(x)}\right)^7}{\left(\mathrm{e}^9\right)^2} = \frac{\left(\mathrm{e}^1\right)^7}{\mathrm{e}^{18}} = \mathrm{e}^{7-18} = \mathrm{e}^{-11}.$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\frac{\left(\mathrm{e}^{\cos^2(x)}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{-\sin^2(x)}}\right)^7}{\left(\mathrm{e}^{3^2}\right)^2} = \mathrm{e}^{-11}.}$$

2.8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(\mathrm{e}^{k^2}\right)\left(\mathrm{e}^k\right)^2}{\mathrm{e}^{-1}}$. On a

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{k^2}\,\mathrm{e}^{2k}\,\mathrm{e}^1\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{k^2+2k+1} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{(k+1)^2} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2\right).$$

NB : on aurait pu laisser la forme $k^2 + 2k + 1$ et calculer chacune des sommes mais vu comme vous aimez les changements d'indice, je vous présente cette dernière méthode. Posons $j = k + 1$. On a alors

$$\begin{aligned} P_n = \exp\left(\sum_{j=2}^{n+1} j^2\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n+1} j^2 - 1\right) &= \exp\left(\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 1\right) \\ &= \exp\left(\frac{\left(n^2+3n+2\right)(2n+3) - 6}{6}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6 - 6}{6}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{6}\right) \\ &= \exp\left(\frac{n\left(2n^2 + 9n + 13\right)}{6}\right). \end{aligned}$$

Le discriminant étant strictement négatif, nous ne pouvons pas factoriser plus.
Conclusion,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(\mathrm{e}^{k^2}\right)\left(\mathrm{e}^k\right)^2}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{\frac{n\left(2n^2+9n+13\right)}{6}}.}$$

2.9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(e^{(k+1)^2}\right)^3}{e^{3k^2}} \right)^{-2}$. On a

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(e^{3(k+1)^2-3k^2}\right)^{-2} = \prod_{k=1}^{n} e^{-6(k+1)^2+6k^2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{6k^2}}{e^{6(k+1)^2}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}},$$

avec pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = e^{6k^2}$. On reconnait alors un produit télescopique et donc

$$P_n = \frac{u_1}{u_{n+1}} = \frac{e^6}{e^{6(n+1)^2}} = e^{6\left(1-(n+1)^2\right)} = e^{-6\left(n^2+2n\right)} = e^{-6n(n+2)}.$$

On pouvait aussi transformer le produit en une exponentielle d'une somme et y reconnaitre une somme télescopique.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(e^{(k+1)^2}\right)^3}{e^{3k^2}} \right)^{-2} = e^{-6n(n+2)}.}$$

3. **Dérivation.**

3.1 Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \frac{\log_a(3x-1)}{2}\sqrt{x-5}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) \text{ existe} \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} 3x-1>0 \\ x-5>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x>5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x>5.$$

Notez que le premier connecteur est juste l'implication réciproque. En effet dans quelques exercices plus élaborés, il est possible que les problèmes de dérivabilité soient levés par des compensations ad hoc. Par exemple la fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 bien que la fonction $\sqrt{\cdot}$ ne le soit pas.
Ainsi f est dérivable sur $]5\,;+\infty[$. De plus pour tout $x \in]5\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x-5}}{2\ln(a)(3x-1)} + \frac{\log_a(3x-1)}{2}\frac{1}{2\sqrt{x-5}} = \frac{6(x-5)+(3x-1)\ln(3x-1)}{4\ln(a)(3x-1)\sqrt{x-5}}.$$

Conclusion, f est dérivable sur $]5\,;+\infty[$ et

$$\forall x \in]5\,;+\infty[, \qquad f'(x) = \frac{6(x-5)+(3x-1)\ln(3x-1)}{4\ln(a)(3x-1)\sqrt{x-5}}.$$

3.2 Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \mathrm{ch}\left(2\log_a(\mathrm{sh}(2x))\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) \text{ existe} \quad \Leftarrow \quad \mathrm{sh}(2x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>0.$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(2\log_a(\mathrm{sh}(2x))\right)'\mathrm{sh}\left(2\log_a(\mathrm{sh}(2x))\right) &= \frac{2(\mathrm{sh}(2x))'}{\ln(a)\,\mathrm{sh}(2x)}\mathrm{sh}\left(2\log_a(\mathrm{sh}(2x))\right) \\ &= \frac{4\,\mathrm{ch}(2x)}{\ln(a)\,\mathrm{sh}(2x)}\mathrm{sh}\left(2\log_a(\mathrm{sh}(2x))\right) \end{aligned}$$

Conclusion, f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \qquad f'(x) = \frac{4\,\mathrm{ch}(2x)}{\ln(a)\,\mathrm{sh}(2x)}\mathrm{sh}\left(2\log_a(\mathrm{sh}(2x))\right).$$

3.3 Soit $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) \text{ existe} \quad &\Leftarrow \quad -1 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{1+x^2} < 1 && \text{car } 1+x^2>0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad 1+x^2>1 && \text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow \quad x^2>0. \end{aligned}$$

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} &= \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-1}{(1+x^2)^2}}} \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\frac{1}{\frac{\sqrt{2x^2+x^4}}{1+x^2}} && \text{car } 1+x^2>0 \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)\,|x|\,\sqrt{2+x^2}} \end{aligned}$$

Conclusion, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)\,|x|\,\sqrt{2+x^2}}.$$

3.4 Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \arctan(2\log_a(3x+4))$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) \text{ existe} \qquad \Leftarrow \qquad 3x+4>0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > -\frac{4}{3}.$$

Donc f est dérivable sur $\left]-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$. De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{(2\log_a(3x+4))'}{1+4\log_a^2(3x+4)} = \frac{\frac{2\times 3}{\ln(a)(3x+4)}}{1+4\log_a^2(3x+4)} = \frac{6}{\ln(a)\,(3x+4)\left(1+4\log_a^2(3x+4)\right)}.$$

Conclusion, f est dérivable sur $\left]-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$ et

$$\forall x \in \left]-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[, \qquad f'(x) = \frac{6}{\ln(a)\,(3x+4)\left(1+4\log_a^2(3x+4)\right)}.$$

3.5 Soit $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$f'(x) \text{ existe} \qquad \Leftarrow \qquad \begin{cases} x \in \left]-1\,;1\right[\\ \arccos(x) \neq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \left]-1\,;1\right[.$$

Donc f est dérivable sur $]-1\,;1[$. De plus pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$f'(x) = \frac{\arcsin'(x)\arccos(x) - \arcsin(x)\arccos'(x)}{\arccos^2(x)} = \frac{\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos^2(x)} = \frac{\arccos(x)+\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2(x)}.$$

Conclusion, f est dérivable sur $]-1\,;1[$ et

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[, \qquad f'(x) = \frac{\arccos(x)+\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2(x)}.$$

4. **Calcul de limite.**

4.1 On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (1-x)^{1/x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1-x)}.$$

Or, on reconnait la limite du taux d'accroissement de la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1-x)$ qui est dérivable en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1-x)-\ln(1)}{x-0} = \varphi'(0) = \frac{-1}{1-0} = -1.$$

Donc par composée de limites, on conclut

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (1-x)^{1/x} = \mathrm{e}^{-1}.}$$

4.2 On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x - 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{x\ln(x)} - 1 = \mathrm{e}^0 - 1 = 0,$$

par croissance comparée. Donc par composition, en posant $u = x^x - 1$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\arccos\left(x^x-1\right)-\pi}{x^x-1} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \frac{2\arccos\left(u\right)-\pi}{u} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} 2\frac{\arccos\left(u\right)-\frac{\pi}{2}}{u}.$$

On reconnait alors le taux d'accroissement de la fonction arccos qui est bien dérivable en 0. D'où,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\arccos\left(x^x-1\right)-\pi}{x^x-1} = 2\lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \frac{\arccos\left(u\right)-\arccos(0)}{u-0} = 2\arccos'(0) = \frac{-2}{\sqrt{1-0^2}} = -2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\arccos\left(x^x-1\right)-\pi}{x^x-1} = -2.}$$

4.3 Par croissance comparée,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3\ln(x) = 0.$$

Donc en posant $u = x^3\ln(x)$, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-\cos\left(x^3\ln(x)\right)}{x^6\ln^2(x)} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \frac{1-\cos\left(u\right)}{u^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{d'après le cours.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-\cos\left(x^3\ln(x)\right)}{x^6\ln^2(x)} = \frac{1}{2}.}$$

4.4 On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{3+\log_2(x)}}{\arctan(x)x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^3}{\arctan(x)}\,\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{\ln(2)}-2\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^3}{\arctan(x)}\,\mathrm{e}^{\frac{1-2\ln(2)}{\ln(2)}\ln(x)}$$

Or $1 < 2\ln(2)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^3}{\arctan(x)} = \frac{2\,\mathrm{e}^3}{\pi}$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{3+\log_2(x)}}{\arctan(x)x^2} = \frac{2\,\mathrm{e}^3}{\pi} \times \mathrm{e}^{-\infty} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{3+\log_2(x)}}{\arctan(x)x^2} = 0.}$$

4.5 On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. Donc pour tout $x > 0$,

$$\frac{-1}{\operatorname{sh}\left(x^3\right)} \leqslant \frac{\cos(x)}{\operatorname{sh}\left(x^3\right)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{sh}\left(x^3\right)} \qquad \text{car } \operatorname{sh}\left(x^3\right) > 0.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}\left(x^3\right) = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\operatorname{sh}\left(x^3\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(x^3\right)} = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sh}\left(x^3\right)} = 0.}$$

4.6 En posant $u = \frac{1}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$, on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\mathrm{ch}\,(u)}{\mathrm{e}^{u^2}} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-u}}{2\,\mathrm{e}^{u^2}} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{u-u^2} + \mathrm{e}^{-u-u^2}}{2}$$
$$= \lim_{u \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2\left(1-\frac{1}{u}\right)} + \mathrm{e}^{-u-u^2}}{2}$$

Or, $\lim_{u \to +\infty} -u^2\left(1 - \dfrac{1}{u}\right) = -\infty \times 1 = -\infty$ et $\lim_{u \to +\infty} -u - u^2 = -\infty$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{\mathrm{e}^{-\infty} + \mathrm{e}^{-\infty}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} = 0.}$$

5. **Equations.**

5.1 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(E) : 2^{x+1} + 4^x = 15$. En posant $X = 2^x$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} (E) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times 2^x + 2^{2x} = 15 \quad & \Leftrightarrow \quad 2 \times 2^x + (2^x)^2 = 15 \\ & \Leftrightarrow \quad 2X + X^2 = 15 \\ & \Leftrightarrow \quad X^2 + 2X - 15 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4 + 4 \times 15 = 4 \times 16 = 64$. Ainsi

$$\begin{aligned} (E) \quad & \Leftrightarrow \quad X = \frac{-2+8}{2} = 3 \quad \text{OU} \quad X = \frac{-2-8}{2} = -5 \\ & \Leftrightarrow \quad 2^x = 3 \quad \text{OU} \quad 2^x = -5 \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x\ln(2)} = 3 \quad \text{OU} \quad \mathrm{e}^{x\ln(2)} = -5 \text{ impossible} \\ & \Leftrightarrow \quad x\ln(2) = \ln(3) \\ & \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{2^{x+1} + 4^x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.}$$

5.2 Soient $(a, x) \in \left(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right)^2$. On a

$$\begin{aligned} \log_a(x) = \log_x(a) \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)} \\ & \Leftrightarrow \quad \ln^2(x) = \ln^2(a) \qquad \text{car } \ln(x) \neq 0 \text{ et } \ln(a) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \ln(x) = \ln(a) \quad \text{OU} \quad \ln(x) = -\ln(a). \\ & \Leftrightarrow \quad x = a \quad \text{OU} \quad x = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\log_a(x) = \log_x(a) \quad \Leftrightarrow \quad x = a \quad \text{OU} \quad x = \frac{1}{a}.}$$

5.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 2^{x^2} = 3^{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x^2\ln(2)} = \mathrm{e}^{x^3\ln(3)} \quad & \Leftrightarrow \quad x^2\ln(2) = x^3\ln(3) \\ & \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad \ln(2) = x\ln(3). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{2^{x^2} = 3^{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.}$$

5.4 Soit $x \in [-1\,;\,1]$. En posant $X = \arcsin(x)$, on a

$$\begin{aligned}
(\arcsin(x)-5)\arcsin(x) = -4 \quad &\Leftrightarrow \quad (X-5)\,X = -4\\
&\Leftrightarrow \quad X^2 - 5X + 4 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (X-1)\,(X-4) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad X = 1 \quad \text{OU} \quad X = 4\\
&\Leftrightarrow \quad \arcsin(x) = 1 \quad \text{OU} \quad \arcsin(x) = 4.
\end{aligned}$$

Or $\arcsin(x) = 4$ est impossible car $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \subseteq \,]-2;2[$. Conclusion, pour $x \in [-1\,;\,1]$,

$$\boxed{(\arcsin(x)-5)\arcsin(x) = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin(1).}$$

5.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les **implications** suivantes,

$$\begin{aligned}
&\arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}\\
\Rightarrow \quad &\tan(\arctan(x) + \arctan(x+1)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\\
\Rightarrow \quad &\frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(x+1))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(x+1))} = 1 \qquad \text{car} \begin{cases}\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\\ \arctan(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\\
\Rightarrow \quad &\frac{x + x + 1}{1 - x(x+1)} = 1\\
\Rightarrow \quad &2x + 1 = 1 - x^2 - x\\
\Rightarrow \quad &x^2 + 3x = 0\\
\Rightarrow \quad &x(x+3) = 0\\
\Rightarrow \quad &x = 0 \quad \text{OU} \quad x = -3.
\end{aligned}$$

Or on remarque que si $x = -3$,

$$\arctan(x) + \arctan(x+1) = \arctan(-3) + \arctan(-2) < 0 + 0 < \frac{\pi}{4}.$$

Donc -3 n'est pas une solution. Ainsi
$\boxed{\text{l'équation } \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4} \text{ admet au plus une solution donnée par } x = 0}$.
NB : il est possible ici de faire la phase de synthèse. Si $x = 0$, on a

$$\arctan(x) + \arctan(x+1) = \arctan(0) + \arctan(1) = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc 0 est bien une solution. Conclusion 0 est l'unique solution de l'équation $\arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}$.

5.6 Soient $x \in \mathbb{R}$ et (E) : $\arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$. On a

$$(E) \text{ est bien définie} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1\,;\,1] \text{ et } x\sqrt{3} \in [-1\,;\,1] \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Soit $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. On a alors les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
&\arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}\\
\Rightarrow \quad &\cos\left(\arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\\
\Rightarrow \quad &\cos(\arcsin(x))\cos\left(\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)\right) - \sin(\arcsin(x))\sin\left(\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)\right) = 0\\
\Rightarrow \quad &\cos(\arcsin(x))\cos\left(\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)\right) - x \times x\sqrt{3} = 0.
\end{aligned}$$

Soit $u = \arcsin(x)$. On sait que $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$. De plus, $u = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\cos(u) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

De même, on obtient que $\cos\left(\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)\right) = \sqrt{1-3x^2}$. Par suite,

$$\begin{array}{rcl} (E) & \Rightarrow & \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-3x^2} - x\left(\sqrt{3}x\right) = 0 \\ & \Rightarrow & \sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-3x^2\right)} = \sqrt{3}x^2 \\ & \Rightarrow & \left(1-x^2\right)\left(1-3x^2\right) = 3x^4 \\ & \Rightarrow & 3x^4 - 4x^2 + 1 = 3x^4 \\ & \Rightarrow & x^2 = \dfrac{1}{4} \\ & \Rightarrow & x = \dfrac{1}{2} \quad \text{OU} \quad x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Or si $x = -\frac{1}{2} < 0$, on a

$$\arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) < 0 < \frac{\pi}{2}$$

donc (E) n'est pas vérifiée. Conclusion,

$\boxed{\text{l'équation } \arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ admet au plus une solution donnée par } x = \frac{1}{2}}$.

Notez qu'ici encore, les valeurs étant remarquables, il est possible de faire la synthèse complète : si $x = \frac{1}{2}$, alors on a bien

$$\arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $x = \frac{1}{2}$ est bien solution. Conclusion, $x = 1/2$ est l'unique solution de $\arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$.

5.7 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \arctan(3x) + \arctan(10x) = \dfrac{3\pi}{4} & \Rightarrow & \tan\left(\arctan(3x) + \arctan(10x)\right) = \tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1 \\ & \Rightarrow & \dfrac{\tan\left(\arctan(3x)\right) + \tan\left(\arctan(10x)\right)}{1 - \tan\left(\arctan(3x)\right)\tan\left(\arctan(10x)\right)} = -1 \\ & \Rightarrow & \dfrac{3x + 10x}{1 - 3x \times 10x} = -1 \\ & \Rightarrow & \dfrac{13x}{1 - 30x^2} = -1 \\ & \Rightarrow & 13x = -1 + 30x^2 \\ & \Rightarrow & 30x^2 - 13x - 1 = 0. \end{array}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 169 + 120 = 289 = 17^2$. Par conséquent les racines associées sont $r_1 = \frac{13-17}{60} = -\frac{4}{60} = -\frac{1}{15}$ et $r_2 = \frac{13+17}{60} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\arctan(3x) + \arctan(10x) = \frac{3\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{1}{15} \text{ OU } x = \frac{1}{2}.$$

Or on observe que si $x = -\frac{1}{15}$ alors $5x < 3x < 0$ et donc $\arctan(3x) + \arctan(10x) < 0 < \frac{3\pi}{4}$. Par conséquent, $-\frac{1}{15}$ n'est pas solution. Conclusion,

$$\boxed{\text{L'équation admet au plus une solution et si celle-ci existe elle vaut nécessairement } x = \frac{1}{2}.}$$

NB : on ne peut pas procéder directement à une synthèse ici, cependant on peut observer que la fonction $f : x \mapsto \arctan(3x) + \arctan(10x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi < \frac{3\pi}{4} < \pi = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Donc par le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$ admet une et une seule solution. Le calcul précédent montre que la seule solution possible est $1/2$. Conclusion,

$$\boxed{\textit{L'équation admet une unique solution donnée par } x = \frac{1}{2}.}$$

5.8 La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc l'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{lll}
(E) & \Rightarrow & \tan\left(\arctan(x) + \arctan(1-x)\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \\
& \Rightarrow & \dfrac{\tan\left(\arctan(x)\right) + \tan\left(\arctan(1-x)\right)}{1 - \tan\left(\arctan(x)\right)\tan\left(\arctan(1-x)\right)} = 1 \qquad \text{car } \begin{cases} \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ \arctan(1-x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \\
& \Rightarrow & \dfrac{x+1-x}{1-x(1-x)} = 1 \\
& \Rightarrow & 1 = 1 - x + x^2 \\
& \Rightarrow & x^2 - x = 0 \\
& \Rightarrow & x(x-1) = 0 \\
& \Rightarrow & x = 0 \;\text{ OU }\; x = 1.
\end{array}$$

Donc les seuls réels candidats sont 0 et 1.
Réciproquement, si $x = 0$, alors

$$\arctan(x) + \arctan(1-x) = \arctan(0) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

et si $x = 1$,

$$\arctan(x) + \arctan(1-x) = \arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $x = 0$ et $x = 1$ sont solutions. Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0; 1\}.}$$