

## Correction de l'interrogation 8

### d'entraînement

### Equations et géométrie complexes

#### 1. Restituer le cours.

1.1 Soit  $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ , avec  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . Alors l'équation  $\omega^2 = z$  d'inconnu  $\omega \in \mathbb{C}$  admet exactement deux solutions données par :

$$\omega_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = -\omega_1 = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}.$$

1.2 Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ . Posons  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta = 0$ , alors l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet une unique solution  $z_0 = -\frac{b}{2a}$ .
- Si  $\Delta \neq 0$ , alors l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet exactement deux solutions données par

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

où  $\delta$  est UNE racine carrée de  $\Delta$ .

1.3 Soient  $(s, p) \in \mathbb{C}^2$  et  $z_1$  et  $z_2$  les deux racines (éventuellement confondues) de  $z^2 - sz + p$ . Alors,

$$z_1 + z_2 = s \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = p.$$

1.4 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

De plus, pour tout  $(z, z') \in \mathbb{U}_n$ , on a

$$zz' \in \mathbb{U}_n, \quad \frac{1}{z} = \bar{z} \in \mathbb{U}_n.$$

1.5 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a l'égalité suivante :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

1.6 On a  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ . De plus,

$$j^2 = \bar{j}, \quad j^3 = 1 \quad \text{et} \quad 1 + j + j^2 = 0.$$

1.7 Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + \dots + z^{n-1} = 0.$$

1.8 Soit  $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ , avec  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . Pour tout  $\omega \in \mathbb{C}$ , on a

$$\omega^n = z \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \omega = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}.$$

#### 2. Racines carrées d'un complexe.

2.1 Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 = 16 - 30i & \Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = 16 - 30i \\ |z|^2 = |16 - 30i| \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ 2xy = -30 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{256 + 900} = \sqrt{1156} = \sqrt{4 \times 289} = 2 \times 17 = 34 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 9 \\ xy = -15 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{car } xy \leq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^2 = 16 - 30i \quad \Leftrightarrow \quad z = 5 - 3i \quad \text{OU} \quad z = -5 + 3i.$$

2.2 Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 = 2 + i &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = 2 + i \\ |z|^2 = |2 + i| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \end{cases} \quad \text{car } xy \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^2 = 2 + i \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}.$$

2.3 Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned} z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} &\Leftrightarrow z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}} \\ &\Leftrightarrow z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} \\ &\Leftrightarrow z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{5\pi}{24}} \quad \text{OU} \quad \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-i\frac{19\pi}{24}} \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2} e^{i\frac{5\pi}{24}} \quad \text{OU} \quad z = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2} e^{-i\frac{19\pi}{24}}.$$

2.4 Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 = 3 - i &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = 3 - i \\ |z|^2 = |3 - i| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{10} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{10}+3}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{10}-3}{2} \\ 2xy = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}} \end{cases} \quad \text{car } xy \leq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^2 = 3 - i \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{\sqrt{10} + 3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10} - 3}{2}} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{\frac{\sqrt{10} + 3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{10} - 3}{2}}.$$

2.5 Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Puisque  $\frac{2\pi + 4\pi}{2} = \frac{6\pi}{18} = \frac{3\pi}{9}$  On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 = e^{i\frac{2\pi}{9}} + e^{i\frac{4\pi}{9}} &\Leftrightarrow z^2 = e^{i\frac{3\pi}{9}} (e^{-i\frac{\pi}{9}} + e^{i\frac{\pi}{9}}) \\ &\Leftrightarrow z^2 = e^{i\frac{\pi}{3}} 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)} e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{OU} \quad z = \sqrt{2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)} e^{-i\frac{5\pi}{6}}, \end{aligned}$$

car  $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) > 0$  car  $\frac{\pi}{9} \in [0; \frac{\pi}{2}[$ . Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^2 = e^{i\frac{2\pi}{9}} + e^{i\frac{4\pi}{9}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)} e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{OU} \quad z = \sqrt{2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)} e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

### 3. Racines $n$ -ièmes d'un complexe.

3.1 Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^7 + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^7 = -1 &\Leftrightarrow z^7 = e^{i\pi} \\ &&\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; 6 \rrbracket, \quad z = e^{i\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^7 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{ e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}} \mid k \in \llbracket 0; 6 \rrbracket \right\}.$$

3.2 Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i) &\Leftrightarrow z^3 = 8 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) &\Leftrightarrow z^3 = 2^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &&\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, \quad z = 2 e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i) \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{ 2 e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \mid k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket \right\}.$$

3.3 Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^{11} = -5i &\Leftrightarrow z^{11} = 5 e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; 10 \rrbracket, \quad z = 5^{\frac{1}{11}} e^{i\left(\frac{3\pi}{22} + \frac{2k\pi}{11}\right)}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^{11} = -5i \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{ 5^{\frac{1}{11}} e^{i\frac{(3+4k)\pi}{22}} \mid k \in \llbracket 0; 10 \rrbracket \right\}.$$

3.4 Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (z - i)^7 = (z + i)^7 &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; 6 \rrbracket, \quad z - i = (z + i) e^{i\frac{2k\pi}{7}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; 6 \rrbracket, \quad z \left( 1 - e^{i\frac{2k\pi}{7}} \right) = i \left( 1 + e^{i\frac{2k\pi}{7}} \right) \\ &\Leftrightarrow k = 0 \text{ et donc } 0 = 2i \text{ impossible} \quad \text{OU} \quad \exists k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, \quad z = i \frac{1 + e^{i\frac{2k\pi}{7}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{7}}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, \quad z = i \frac{e^{i\frac{k\pi}{7}} (e^{-i\frac{k\pi}{7}} + e^{i\frac{k\pi}{7}})}{e^{i\frac{k\pi}{7}} (e^{-i\frac{k\pi}{7}} - e^{i\frac{k\pi}{7}})} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, \quad z = i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{(-2i) \sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, \quad z = -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$(z - i)^7 = (z + i)^7 \Leftrightarrow z \in \left\{ -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} \mid k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \right\}.$$

3.5 Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (z + i)^4 = (z + 1)^4 &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket, \quad z + i = (z + 1) e^{i \frac{2k\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket, \quad z \left( 1 - e^{i \frac{k\pi}{2}} \right) = e^{i \frac{k\pi}{2}} - i \\ &\Leftrightarrow k = 0 \text{ et donc } 0 = 1 - i \text{ impossible} \quad \text{OU} \quad \exists k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, \quad z = \frac{e^{i \frac{k\pi}{2}} - e^{i \frac{\pi}{2}}}{1 - e^{i \frac{k\pi}{2}}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, \quad z = \frac{e^{i \frac{(k+1)\pi}{4}} \left( e^{i \frac{(k-1)\pi}{4}} - e^{-i \frac{(k-1)\pi}{4}} \right)}{e^{i \frac{k\pi}{4}} \left( e^{-i \frac{k\pi}{4}} - e^{i \frac{k\pi}{4}} \right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, \quad z = e^{i \frac{\pi}{4}} \frac{2i \sin\left(\frac{(k-1)\pi}{4}\right)}{(-2i) \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, \quad z = -e^{i \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$(z - i)^7 = (z + i)^7 \Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)} e^{i \frac{5\pi}{4}} \mid k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \right\}.$$

*NB : dans ce cas, on peut spécifier les solutions, si  $k = 1$ ,  $z = 0$ , si  $k = 2$ ,  $z = -\frac{1+i}{2}$  et si  $k = 3$ ,  $z = -1 - i$ .*

#### 4. Equations complexes du second degré.

4.1 Considérons l'équation (E) :  $z^2 - 5z + 7 + i = 0$  d'inconnu  $z \in \mathbb{C}$ . Soit  $\Delta$  le discriminant de (E). On a

$$\Delta = 25 - 28 - 4i = -3 - 4i.$$

Soit  $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$ , avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Delta &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = -3 - 4i \\ |\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ 2xy = -4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{car } xy \leq 0. \end{aligned}$$

Fixons désormais  $\delta = 1 - 2i$ . Les deux solutions de (E) sont alors données par

$$z_1 = \frac{5 - 1 + 2i}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5 + 1 - 2i}{2} = 3 - i.$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^2 - 5z + 7 + i = 0 \Leftrightarrow z \in \{2 + i; 3 - i\}.$$

4.2 Considérons l'équation  $(E) : z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$  d'inconnu  $z \in \mathbb{C}$ . Soit  $\Delta$  le discriminant de  $(E)$ . On a

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 4i + 4 = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1.$$

Par conséquent les deux solutions de  $(E)$  sont

$$z_1 = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i.$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\boxed{z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{1 + i; i\}.$$

4.3 Considérons l'équation  $(E) : z^4 + 4z^2 + 5 = 0$  d'inconnu  $z \in \mathbb{C}$ . Posons  $\omega = z^2$  et considérons également l'équation  $(F) : \omega^2 + 4\omega + 5 = 0$ . Soit  $\Delta$  le discriminant de  $(F)$ . On a

$$\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$$

Par conséquent, les deux solutions de  $(F)$  sont données par

$$\omega_1 = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i.$$

Or  $z$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $\omega = z^2$  est solution de  $(F)$ . Donc les solutions de  $(E)$  sont les racines carrées de  $\omega_1$  et de  $\omega_2$ .

Cherchons les racines carrées de  $\omega_1$ . Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 = \omega_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = -2 + i \\ |z|^2 = |\omega_1| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \end{cases} \quad \text{car } xy \geq 0 \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}. \end{aligned}$$

Cherchons les racines carrées de  $\omega_2$ . On constate que  $\omega_2 = \overline{\omega_1}$ . Donc on a les équivalences suivantes :

$$z^2 = \omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = \overline{\omega_1} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z^2} = \omega_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z}^2 = \omega_1.$$

Donc par ce qui précède :

$$\begin{aligned} z^2 = \omega_2 &\Leftrightarrow \overline{z} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \quad \text{OU} \quad \overline{z} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}. \end{aligned}$$

Conclusion, en notant  $a = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$  et  $b = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$ , pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\boxed{z^4 + 4z^2 + 5 = 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{a + ib; -a - ib; a - ib; -a + ib\}.$$

4.4 Considérons l'équation  $(E) : z^2 - (1 + 3i)z + 4 + 4i = 0$  d'inconnu  $z \in \mathbb{C}$ . Soit  $\Delta$  le discriminant de  $(E)$ .  
On a

$$\Delta = (1 + 3i)^2 - 16 - 16i = 1 + 6i - 9 - 16 - 16i = -24 - 10i = -2(12 + 5i).$$

Soit  $\delta' = x + iy \in \mathbb{C}$ , avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (\delta')^2 = 12 + 5i &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = 12 + 5i \\ |\delta|^2 = |12 + 5i| = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{25}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{car } xy \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \delta' = \frac{5 + i}{\sqrt{2}} \quad \text{OU} \quad \delta' = -\frac{5 + i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Par conséquent pour  $\delta \in \mathbb{C}$ ,

$$\delta^2 = \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \delta = (\sqrt{2}i) \frac{5 + i}{\sqrt{2}} = -1 + 5i \quad \text{OU} \quad \delta = -(\sqrt{2}i) \frac{5 + i}{\sqrt{2}} = 1 - 5i.$$

Fixons désormais  $\delta = -1 + 5i$ . Les deux solutions de  $(E)$  sont alors données par

$$z_1 = \frac{1 + 3i - 1 + 5i}{2} = 4i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 + 3i + 1 - 5i}{2} = 1 - i.$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\boxed{z^2 - (1 + 3i)z + 4 + 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{4i ; 1 - i\}.$$

4.5 Considérons l'équation  $(E) : z^2 - 2(2 + i)z + 6 + 8i = 0$  d'inconnu  $z \in \mathbb{C}$ . Soit  $\Delta$  le discriminant de  $(E)$ .  
On a

$$\Delta = 4(2 + i)^2 - 24 - 32i = 4(4 + 4i - 1 - 6 - 8i) = 4(-3 - 4i).$$

Soit  $\delta' = x + iy \in \mathbb{C}$ , avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (\delta')^2 = -3 - 4i &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = -3 - 4i \\ |\delta|^2 = |-3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ 2xy = -4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{car } xy \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \delta' = 1 - 2i \quad \text{OU} \quad \delta' = -1 + 2i \end{aligned}$$

Par conséquent pour  $\delta \in \mathbb{C}$ ,

$$\delta^2 = \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 2(1 - 2i) = 2 - 4i \quad \text{OU} \quad \delta = -2(-1 + 2i) = 2 - 4i.$$

Fixons désormais  $\delta = 2 - 4i$ . Les deux solutions de  $(E)$  sont alors données par

$$z_1 = \frac{4 + 2i + 2 - 4i}{2} = 3 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4 + 2i - 2 + 4i}{2} = 1 + 3i.$$

Conclusion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{3-i; 1+3i\}.$$

### 5. Applications géométriques.

5.1 Notons  $z_A, z_B$  et  $z_C$  les affixes de  $A, B$  et  $C$  respectivement. On remarque que  $z_B - z_A = 4 + 3i - 1 - i = 3 + 2i \neq 0$  et

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{5}{2}i - 1 - i}{3 + 2i} = \frac{5i - 2 - 2i}{2(3 + 2i)} = \frac{3i - 2}{2(3 + 2i)} = \frac{(3i - 2)(3 - 2i)}{2(9 + 4)} = \frac{9i + 6 - 6 + 4i}{26} = \frac{13i}{26} = \frac{i}{2}.$$

Par conséquent  $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$  et donc  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

5.2 Notons  $z_A, z_B$  et  $z_C$  les affixes de  $A, B$  et  $C$  respectivement. On remarque que  $z_B - z_A = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + i \neq 0$  et

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{3 + 1} = \frac{\sqrt{3} - i - 3i - \sqrt{3}}{4} = -i.$$

Par conséquent  $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{3\pi}{2}$  et donc  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

5.3 Notons  $z_A, z_B$  et  $z_C$  les affixes de  $A, B$  et  $C$  respectivement. On remarque que  $z_B - z_A = 1 + iz - (1 + i)z = 1 - z \neq 0$  car par hypothèse  $z \neq 1$ . Donc  $\omega = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  est bien défini. De plus,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{z - i - (1 + i)z}{1 - z} = -i \frac{1 + z}{1 - z} = -i \frac{(1 + z)(1 - \bar{z})}{|1 - z|^2} = -i \frac{1 - \bar{z} + z - |z|^2}{|1 - z|^2} \\ &= -i \frac{1 + 2i\text{Im}(z) - 1}{|1 - z|^2} \quad \text{car } z \in \mathbb{U} \\ &= \frac{2\text{Im}(z)}{|1 - z|^2} \end{aligned}$$

Donc  $\omega \in \mathbb{R}$ . Conclusion  $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}$  et donc  $A, B$  et  $C$  sont alignés.

5.4 Notons  $z_A, z_B$  et  $z_C$  les affixes de  $A, B$  et  $C$  respectivement. On remarque que  $z_B - z_A = iz - i - (1 + i)z = -z - i \neq 0$  car par hypothèse  $z \neq -i$ . Donc  $\omega = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  est bien défini. De plus,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{z - 1 - (1 + i)z}{-z - i} = \frac{-1 - iz}{-z - i} = \frac{iz + 1}{z + i} = \frac{(iz + 1)(\bar{z} - i)}{|z + i|^2} \\ &= \frac{i|z|^2 + z + \bar{z} - i}{|z + i|^2} \\ &= \frac{i + 2\text{Re}(z) - i}{|z + i|^2} \quad \text{car } z \in \mathbb{U} \\ &= \frac{2\text{Re}(z)}{|z + i|^2}. \end{aligned}$$

Donc  $\omega \in \mathbb{R}$ . Conclusion  $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}$  et donc  $A, B$  et  $C$  sont alignés.

5.5 Soit  $f : z \mapsto z - 1 + 3i$ . On reconnaît alors directement une translation de vecteur d'affixe  $-1 + 3i$ .

5.6 Soit  $f : z \mapsto iz + 1 - i$ . Ici  $a = i \neq 1$ . Donc  $f$  est une similitude avec un unique point fixe. Soit  $\omega \in \mathbb{C}$ . On a

$$f(\omega) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega = i\omega + 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad \omega(1 - i) = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 1.$$

En posant  $\omega = 1$ , on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = i(z - \omega) + \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1) + 1.$$

On reconnaît alors une rotation de centre  $\Omega(1)$  et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

5.7 Soit  $f : z \mapsto \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$ . Puisque  $a = \frac{1-i}{2} \neq 1$ ,  $f$  est une similitude avec un unique point fixe. Soit  $\omega \in \mathbb{C}$ . On a

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega &\Leftrightarrow \omega = \frac{1-i}{2}\omega + \frac{-3+i}{2} \\ &\Leftrightarrow \omega \frac{1+i}{2} = \frac{-3+i}{2} \\ &\Leftrightarrow \omega = \frac{-3+i}{1+i} = \frac{(-3+i)(1-i)}{1+1} = \frac{-3+3i+i+1}{2} = -1+2i. \end{aligned}$$

Posons  $\omega = -1+2i$ , alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\frac{1-i}{2}(z-\omega) + \omega = \frac{1-i}{2}(z+1-2i) - 1 + 2i = \frac{1-i}{2}z + \frac{1-2i-i-2-2+4i}{2} = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2} = f(z).$$

Or  $\frac{1-i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ . Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z - \omega) + \omega.$$

On reconnaît alors

une similitude de centre  $\Omega(-1+2i)$ , d'angle  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  et de coefficient homothétique  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

5.8 Soit  $f : z \mapsto \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + i + \sqrt{3}$ . Comme  $a = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \neq 1$ ,  $f$  est une similitude avec un unique point fixe. Soit  $\omega \in \mathbb{C}$ . On a

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega &\Leftrightarrow \omega = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\omega + i + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \omega \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \sqrt{3} + i \\ &\Leftrightarrow \omega = 2 \frac{\sqrt{3} + i}{1 - \sqrt{3}i} = 2 \frac{(\sqrt{3} + i)(1 + \sqrt{3}i)}{1 + 3} = \frac{\sqrt{3} + 3i + i - \sqrt{3}}{2} = 2i. \end{aligned}$$

Posons  $\omega = 2i$ , alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z-\omega) + \omega = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z-2i) + 2i = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z - i + \sqrt{3} + 2i = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \sqrt{3} + i = f(z).$$

Or  $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ . Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - \omega) + \omega.$$

On reconnaît alors une rotation de centre  $\Omega(2i)$  et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

5.9 Soit  $f : z \mapsto (1+i)z$ . On a pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$f(z) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z.$$

On reconnaît alors

une similitude de centre  $O$ , d'angle de rotation  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et de coefficient d'homothétie de  $k = \sqrt{2}$ .