Interrogation 9 d'entrainement
Calcul d'intégrales

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir une fonction $\mathscr{C}^1$.
   1.2 Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
   1.3 Enoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
   1.4 Enoncer la croissance de l'intégrale.
   1.5 Enoncer la séparation de l'intégrale.
   1.6 Enoncer le théorème d'intégration par parties.
   1.7 Enoncer le théorème de changement de variable.

   Révisions

   1.8 Développer $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$.
   1.9 Linéariser $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$.
   1.10 Factoriser $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
   1.11 Valeurs remarquables du sinus, cosinus, tangente.
   1.12 Limites remarquables.
   1.13 Dresser les variations de sinus, cosinus et tangente sur $[0; 2\pi]$.
   1.14 Donner les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions sinus, cosinus, tangente.
   1.15 Enoncer les formules de l'angle moitié.

2. **Reconnaitre une primitive/Savoir dériver.** Sans justification, ni d'étude de domaine de définition, donner les primitives des fonctions suivantes.

   2.1 $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{x}}$.
   2.2 $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-9\ln^2(x)}}$.
   2.3 $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}$.
   2.4 $x \mapsto x^2 5^{x^3}$.
   2.5 $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{3}{x}\right)}{x^2}$.
   2.6 $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$.
   2.7 $x \mapsto e^{3x}\operatorname{ch}\left(e^{3x}\right)$.
   2.8 $x \mapsto 3\ln(x)\left(x\ln(x) - x\right)$.
   2.9 $x \mapsto x\pi^{x^2}$.
   2.10 $x \mapsto \cos(2x+1)\, e^{\sin(2x+1)}$.
   2.11 $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}^2(x)}$.
   2.12 $x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}$.
   2.13 $x \mapsto \frac{1}{4x\ln(4x)}$.
   2.14 $x \mapsto \frac{4x+3}{2x^2+3x+5}$.
   2.15 $x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^3(x)}$.
   2.16 $x \mapsto \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Sans justification, ni d'étude de domaine de dérivabilité, donner les dérivées des fonctions suivantes.

   2.21 $x \mapsto \ln\left(x^2 e^x\right)$.
   2.22 $x \mapsto e^{\operatorname{sh}^2(x)}$.
   2.23 $x \mapsto \arcsin\left(x^{3x}\right)$.
   2.24 $x \mapsto \tan\left(\cos\left(\operatorname{sh}(x)\right)\right)$.
   2.25 $x \mapsto \ln\left(3 + e^{5x^2}\right)$.
   2.26 $x \mapsto \arcsin\left(\arccos(x)\right)$.
   2.27 $x \mapsto \frac{e^{3x}}{1-5x^2}$.
   2.28 $x \mapsto \ln\left(\sin(x)\right)\ln\left(\operatorname{sh}\left(x^2\right)\right)$.
   2.29 $x \mapsto \ln\left(\operatorname{ch}^2(x)\right)$.
   2.30 $x \mapsto \tan\left(\operatorname{sh}^3(2x)\right)$.
   2.31 $x \mapsto \left(\ln(x)\right)^{x^2}$.
   2.32 $x \mapsto e^{2x}\tan(3x)$.
   2.33 $x \mapsto \sqrt{1+\arctan^2(x)}$.
   2.34 $x \mapsto \pi^{\cos(x)}$.
   2.35 $x \mapsto \arctan\left(\ln^3(x)\right)$.
   2.36 $x \mapsto e^{e^{e^x}}$.

3. **Savoir faire une intégration par parties.**

   3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\, \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ existe puis exprimer I_{n+1} en fonction de I_n à l'aide d'une intégration par parties.

   3.2 Justifier que $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{\arccos(x)}\,\mathrm{d}x$ existe puis la calculer à l'aide de **deux** intégrations par parties.

   3.3 Justifier que $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{0} \cos(a)\,\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{d}a$ existe puis la calculer à l'aide de **deux** intégrations par parties.

   3.4 Justifier que $I = \displaystyle\int_2^3 \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$ existe puis la calculer à l'aide d'une intégration par parties.

   3.5 Justifier que $I = \displaystyle\int_0^1 \theta \arctan^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ existe puis la calculer à l'aide d'une intégration par parties.

4. **Savoir faire un changement de variable.**

   4.1 Justifier que $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{ch}(x)-1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $y = \mathrm{e}^x$.

   4.2 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1+\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)}\,\mathrm{ch}(x)$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide d'un changement de variable.

   4.3 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ admet des primitives sur $]0\,;\,\pi[$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $s = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

   4.4 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{1+\sin^2(x)}$ admet des primitives sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $a = \tan(x)$.

   4.5 Justifier que $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $\theta = \sqrt{1+x^6}$.

5. **Manipulation du petit o.**

   5.1 Soit $A(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3+4x^2\right) + x^3 o\left(\cos(x)+\frac{1}{x}\right)$. Simplifier $A(x)$.

   5.2 Soit $B(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(3x + o\left(\ln(x)\right)\right) + o\left(\mathrm{e}^x\right) + 7x^3$. Simplifier $B(x)$.

   5.3 Soit $C(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3 - 2o\left(\ln(x)\right) + \mathrm{e}^{2x}\right) + o\left(\sqrt{x}\right)$. Simplifier $C(x)$.

   5.4 Soit $D(x) \underset{x\to+\infty}{=} \cos(x) - 8o\left(1\right) o\left(\sqrt{x}\right) + o\left(\ln\left(x+\mathrm{e}^x\right)\right)$. Simplifier $D(x)$.

   5.5 Soit $E(x) \underset{x\to 1}{=} o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + o\left(\mathrm{e}^x\right) + 5o\left(\frac{1}{\sin(x-1)}\right) + o\left(x-1\right)$. Simplifier $E(x)$.
   Poser le changement de variable $h = x - 1$.