Interrogation de révision 04 d'entrainement Intégrales et équations différentielles d'ordre I

1. **Restituer le cours : calculs d'intégrales.**
   1.1 Définir une fonction $\mathscr{C}^1$.
   1.2 Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
   1.3 Enoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
   1.4 Enoncer la croissance de l'intégrale.
   1.5 Enoncer la séparation de l'intégrale.
   1.6 Enoncer le théorème d'intégration par parties.
   1.7 Enoncer le théorème de changement de variable.
2. **Restituer le cours : équations différentielles d'ordre I.**
   2.1 Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation homogène d'ordre 1.
   2.2 Enoncer la proposition qui affirme que l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.
   2.3 Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à partir d'une solution « particulière ».
   2.4 Enoncer le principe de superposition.
   2.5 Définir un problème de Cauchy. Propriété ?
3. **Changement de variable**
   3.1 Justifier que $f : x \mapsto \sqrt{\operatorname{ch}(x) - 1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $y = \mathrm{e}^x$.
   3.2 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)} \operatorname{ch}(x)$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide d'un changement de variable.
   3.3 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ admet des primitives sur $]0\,;\pi[$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $s = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
   3.4 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{1+\sin^2(x)}$ admet des primitives sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $a = \tan(x)$.
   3.5 Justifier que $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $\theta = \sqrt{1+x^6}$.
4. **Méthode de variation de la constante**
   5.1 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{2x}{1-x^2} y(x) = \sqrt{1-x^2}$ admet des solutions sur $I =]-1\,;1[$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto 1 - x^2$ est une solution de l'équation homogène associée.
   5.2 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{1+x} y(x) = 1 + \ln(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   Intégrer $x \mapsto x\ln(x)$ par une intégration par parties.
   5.3 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) - 2y(x) = \cos(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   5.4 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{x(x+1)} y(x) = (x+1)\arctan(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   5.5 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{1+x} y(x) = \sin(x)$ admet des solutions sur $I =]-1\,;+\infty[$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est une solution de l'équation homogène associée.