

Interrogation de révision 07
d'entraînement
Ensembles et applications, continuité et
dérivabilité

1. Restituer le cours : ensembles et applications

- 1.1 Énoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
- 1.2 Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
- 1.3 Définir l'injectivité et la surjectivité.
- 1.4 Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse (Prop II.16).

2. Restituer le cours : continuité et dérivabilité

- 2.1 Énoncer le théorème d'encadrement.
- 2.2 Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
- 2.3 Énoncer le théorème des bornes atteintes.
- 2.4 Énoncer l'identité des accroissements finis.

3. Manipuler les applications

- 3.1 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que $g \circ f$ est surjective implique que g est surjective.
- 3.2 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathcal{F}(F, G)$ injective. Montrer que pour tout $(g, h) \in \mathcal{F}(E, F)$, on a $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.
- 3.3 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathcal{F}(E, F)$ injective. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- 3.4 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathcal{F}(E, F)$ surjective. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$, $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.
- 3.5 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et si g est injective alors f est surjective.

4. Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$

- 5.1 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} x\sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
- 5.2 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
- 5.3 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\text{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
- 5.4 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
- 5.5 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\text{ch}(x)-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $f'(0)$.