

Interrogation de révision 09

d'entraînement

espaces vectoriels et familles de vecteurs

1. Restituer le cours : espaces vectoriels

- 1.1 Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
- 1.2 Définir la somme de deux espaces vectoriels.
- 1.3 Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
- 1.4 Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
- 1.5 Énoncer les deux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme.

2. Restituer le cours : familles de vecteurs

- 2.1 Définir et caractériser une famille libre.
- 2.2 Définir et caractériser une famille liée.
- 2.3 Définir une famille génératrice.
- 2.4 Définir et caractériser une base.
- 2.5 Énoncer le théorème de la base adaptée.

3. Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires

- 3.1 Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R}\}$ et $G = \left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- 3.2 Montrer que $F = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- 3.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 3.4 Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- 3.5 Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 7f = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. Déterminer si une famille est libre ou liée.

- 5.1 Déterminer si $\mathcal{L} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est libre ou liée.
- 5.2 Déterminer si $\mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre ou liée.
- 5.3 Soient $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille libre de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs d'un espace vectoriel E . On pose pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $v_i = \sum_{j=1}^i u_j$. Montrer que $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_p)$ est libre.
- 5.4 Montrer que $\mathcal{L} = (X(X-1)^2, X^2(X-1), X^3, (X-1)^3)$ est libre.
- 5.5 Déterminer si $\mathcal{L} = (x \mapsto |x|, x \mapsto |x-1|, x \mapsto |x+1|)$ est libre ou liée.
- 5.6 Déterminer si $\mathcal{L} = (x \mapsto \sin(x + k\frac{\pi}{4}))_{k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket}$ est libre ou liée.