Interrogation de révision 10 d'entrainement dimension et séries

1. **Restituer le cours : séries**
   1.1 Définir la divergence grossière. Si la série converge, que dire de son terme général ? Donner un contre-exemple à la réciproque.
   1.2 Enoncer le théorème sur les séries de Riemann.
   1.3 Enoncer le théorème de comparaison.
   1.4 Enoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.
   1.5 Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?
2. **Restituer le cours : dimension finie**
   2.1 Enoncer le théorème de la base extraite.
   2.2 Enoncer le théorème de la base incomplète.
   2.3 Caractériser par la dimension le fait qu'une famille soit une base.
   2.4 Caractériser par la dimension le fait que deux sous-espaces vectoriels soient égaux.
   2.5 Caractériser par le rang le fait qu'une famille soit génératrice/libre/base.
   2.6 Enoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.
3. **Nature d'une série par équivalents**
   3.1 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n+3^n}{5n^3-\ln(n)+5^n}$.
   3.2 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.
   3.3 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$.
   3.4 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
   3.5 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = -\left[2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.
4. **Calculer un rang.**
   5.1 Soit $\mathscr{F} = \left(3+X+X^2, 5-2X^2, 3X+X^2, 1-X+X^2\right)$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   5.2 Soit $\mathscr{F} = ((1,0,-2),(4,2,1),(-1,3,1),(0,3,3))$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   5.3 Soient $P\in\mathbb{R}[X]$, $\deg(P)=2$ et $\mathscr{F} = \left(P, P', P'', P^{(3)}, P^{(4)}\right)$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
   5.4 Calculer le rang de $\mathscr{F} = \left((2)_{n\in\mathbb{N}}, (n!)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}, (5+2n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
   5.5 Soient $\varepsilon>0$ un réel strictement positif et $E=\mathscr{F}([-\varepsilon,\varepsilon],\mathbb{R})$. On considère dans E la famille $\mathscr{F} = \left(x\mapsto\cos(x), x\mapsto x\cos(x), x\mapsto x^2\cos(x)\right)$. Montrer que $\mathscr{F}$ est libre et en déduire son rang.
   Indication : un tout petit DL...