Correction de l'interrogation de révision 01
Fonctions réelles et trigonométrie

1. (a) Définir une fonction dérivable en a. Quel est le lien entre continuité et dérivabilité ?
Solution. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On a

$$f \text{ est dérivable en } a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

En particulier

$$(\ f \text{ dérivable en } a\ ) \qquad \Rightarrow \qquad (\ f \text{ continue en } a\ ).$$

(b) Développer $\tan(a+b)$.
Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que a, b, $a+b$ et $a-b$ dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

2. Montrer que $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{2x}$ définit une bijection de $[0; +\infty[$ dans un ensemble J à déterminer puis montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{0\}$ et établir une expression de $\left(f^{-1}\right)'$ en fonction de f^{-1}.
Solution. La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{2x} + 2x^2\,\mathrm{e}^{2x} = 2x(1+x)\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Or f est continue en 0 donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Enfin, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On a donc

- f est continue sur $[0; +\infty[$,
- f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définie une bijection de } [0; +\infty[\text{ dans } J = \left[f(0); \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[= [0; +\infty[.}$$

Posons $J' = J \setminus \{0\} =]0; +\infty[$. Par ce qui précède,

- f est dérivable sur $I' =]0; +\infty[$,
- f est strictement croissante sur I',
- et $\forall x \in I'$, $f'(x) = 2x(x+1)\,\mathrm{e}^{2x} \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J' =]0; +\infty[$ et

$$\forall y \in J', \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{2f^{-1}(y)\left(f^{-1}(y) + 1\right)\mathrm{e}^{2f^{-1}(y)}}.$$

Conclusion, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[}$ et

$$\boxed{\forall y \in]0; +\infty[, \qquad f^{-1}(y) = \frac{1}{2f^{-1}(y)\left(f^{-1}(y) + 1\right)\mathrm{e}^{2f^{-1}(y)}}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : 2\sin^2(x) - 3\sin(x) \geqslant 2$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \sin(x)$. On a les équivalences suivantes :

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2X^2 - 3X \geqslant 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2X^2 - 3X - 2 \geqslant 0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 9 + 16 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{3+5}{4} = 2$. Dès lors,

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad X \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad X \geqslant 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \sin(x) \geqslant 2.$$

Or $\sin(x) \geqslant 2$ est impossible. Donc

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{(I)} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right].}$$