Correction de l'interrogation de révision 02
Complexes et calcul algébrique

1. (a) Enoncer la formule donnant le carré du module d'une somme.
Solution. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 .$$
(b) Donner la somme géométrique.
Solution. Soient $q \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$. On a
$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{2iz-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$.
Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $z+1=0 \iff z=-1$. On fixe alors $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
\frac{2iz-i}{z+1} \in i\mathbb{R} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{2iz-i}{z+1} = -\overline{\left(\frac{2iz-i}{z+1}\right)} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2iz-i}{z+1} = -\frac{-2i\overline{z}+i}{\overline{z}+1} \\
& \Leftrightarrow \quad (2iz-i)(\overline{z}+1) = (2i\overline{z}-i)(z+1) \qquad \text{car } z \neq -1 \text{ et donc } \overline{z} \neq -1 \\
& \Leftrightarrow \quad 2i|z|^2 + 2iz - i\overline{z} - i = 2i|z|^2 + 2i\overline{z} - iz - i \\
& \Leftrightarrow \quad 3iz = 3i\overline{z} \\
& \Leftrightarrow \quad z = \overline{z} \\
& \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\frac{2iz-i}{z+1} \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} 2^i$.
Solution. On va sommer sur i en interne :
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} 2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 2^i - 1 \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left((2+1)^j - 1 \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 3^j - \sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= 3 \times \frac{3^n - 1}{3-1} - n \\
&= \frac{3}{2}(3^n - 1) - n.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{S_n = \frac{3}{2}(3^n - 1) - n.}$$