Correction de l'interrogation de révision 03 fonctions usuelles et équations complexes

1. (a) Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique / arccosinus / arcsinus / arctan.
   Solution.
   - La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
   - La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
   - La fonction cosinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.
   - La fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
   - La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   - La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   - La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   (b) Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
   Solution. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement confondues) de az^2+bz+c. Alors,
   $$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \arctan(x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$.
   Solution. La fonction arctangente est définie sur $\mathbb{R}$ donc l'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :
   $$\begin{aligned}
   (E) \quad &\Rightarrow \quad \tan(\arctan(x) + \arctan(1-x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
   &\Rightarrow \quad \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(1-x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(1-x))} = 1 \qquad \text{car } \begin{cases} \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ \arctan(1-x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \\
   &\Rightarrow \quad \frac{x+1-x}{1-x(1-x)} = 1 \\
   &\Rightarrow \quad 1 = 1 - x + x^2 \\
   &\Rightarrow \quad x^2 - x = 0 \\
   &\Rightarrow \quad x(x-1) = 0 \\
   &\Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad x = 1.
   \end{aligned}$$
   Donc les seuls réels candidats sont 0 et 1.
   Réciproquement, si $x = 0$, alors
   $$\arctan(x) + \arctan(1-x) = \arctan(0) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
   et si $x = 1$,
   $$\arctan(x) + \arctan(1-x) = \arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$
   Donc $x = 0$ et $x = 1$ sont solutions. Conclusion, l'ensemble solution est donné par
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{0;1\}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 - \left(1 - i\sqrt{3}\right)z - 1 = 0$.
   Solution. Soit Δ le discriminant associé à l'équation. On a
   $$\Delta = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 + 4 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 + 4 = 2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Donc les racines de Δ sont $2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}-i$. Posons $\delta = \sqrt{3}-i$. Dès lors les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,(1-i) \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}-\sqrt{3}+i}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,(1+i)\,.$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,(1-i)\,;\frac{1-\sqrt{3}}{2}\,(1+i)\right\}.}$$