Correction de l'interrogation de révision 04 intégration et équation différentielles I

1. (a) Enoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
   Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{K})$. Alors,
   $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
   (b) Enoncer le principe de superposition.
   Solution. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $d_1 : I \to \mathbb{K}$ et $d_2 : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I et (E_1), (E_2) et (E) les équations suivantes :
   $$\begin{array}{lll} (E_1) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) \\ (E_2) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_2(x) \\ (E) & \forall x \in I, & ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) + d_2(x). \end{array}$$
   Si y_1 est une solution de (E_1) et si y_2 est une solution de (E_2) alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E).
2. Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^x$.
   Solution. La fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \neq 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et
   $$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$
   Posons $u = \mathrm{e}^t$, alors $t = \ln(u)$. Si $t = 0$, alors $u = 1$ et si $t = x$ alors $u = \mathrm{e}^x$. De plus, $u \mapsto \ln(u)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[1; \mathrm{e}^x]$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Donc
   $$F(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u = [\arctan(u)]_{u=1}^{u=\mathrm{e}^x} = \arctan(\mathrm{e}^x) - \arctan(1) = \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{4}.$$
   Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{x \mapsto \arctan(\mathrm{e}^x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.}$$
3. Justifier que l'équation $(E) : y' - y = x^5\,\mathrm{e}^x$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une solution de l'équation homogène associée.
   Solution. Les fonctions $a : x \mapsto -1$ et $b : x \mapsto x^5\,\mathrm{e}^x$ sont continues sur **l'intervalle** $\mathbb{R}$ donc
   $$\boxed{(E) \text{ admet des solutions sur } \mathbb{R}.}$$
   Soient y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = y(x)/y_0(x)$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) \neq 0$). La fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a les équivalences suivantes :
   $$\begin{array}{lll} & y \text{ solution de } (E) & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) - \lambda(x)y_0(x)}_{=0} = x^5\,\mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & \lambda'(x)y_0(x) = x^5\,\mathrm{e}^x \quad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & \lambda'(x)\,\mathrm{e}^x = x^5\,\mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & \lambda'(x) = x^5 \quad \text{car } \mathrm{e}^x \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, & \lambda(x) = \frac{x^6}{6} + C \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, & y(x) = \left(\frac{x^6}{6} + C\right)\mathrm{e}^x. \end{array}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\dfrac{x^6}{6} + C\right)\mathrm{e}^x \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$