Correction de l'interrogation de révision 05 équation différentielles II et calculs dans $\mathbb{R}$

1. (a) Caractériser avec la valeur absolue le fait qu'une partie soit bornée.
Solution. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :
$$A \text{ est bornée} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, \quad |x| \leqslant M.$$
(b) Traduire le fait que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Solution. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x<y,\ \exists r \in \mathbb{Q}, \quad x<r<y.$$
De même l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x<y,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \quad x<\alpha<y.$$

2. Déterminer les solutions de l'équation $(\mathscr{P})$ suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t)+y'(t)+y(t)=0 & \quad (E_0) \\ y(0)=0 \text{ et } y'(0)=\frac{1}{2}. \end{cases}$$
Solution. Soit (E_c) l'équation caractéristique associée à (E_0). On a (E_c) : $r^2+r+1=0$. On sait que les solutions de (E_c) sont les racines troisièmes de l'unité différentes de 1 i.e.
$$r_1 = j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = j^2 = \overline{j} = \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
On a donc les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ 0 = y(0) = A \\ \frac{1}{2} = y'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}B\cos(0)\mathrm{e}^0 - \frac{B}{2}\sin(0)\mathrm{e}^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}B \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ A = 0 \\ B = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases} \end{aligned}$$
Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy $(\mathscr{P})$, donnée par
$$\boxed{y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \end{array}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x-4}-\sqrt{2x-3} \leqslant 0$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x-4 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ x \geqslant 4$ et $2x-3 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ x \geqslant \frac{3}{2}$.
Soit $x \in [4;+\infty[$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \sqrt{x-4}-\sqrt{2x-3} \leqslant 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \sqrt{x-4} \leqslant \sqrt{2x-3} \\ & \Leftrightarrow \quad x-4 \leqslant 2x-3 \qquad \textit{car } x-4 \geqslant 0 \textit{ et } 2x-3 \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x. \end{aligned}$$
Conclusion, l'ensemble solution est
$$\boxed{\mathscr{S} = [4;+\infty[.}$$