Correction de l'interrogation de révision 06 matrice et analyse asymptotique

1. (a) Enoncer la propriété donnant la transposée du produit.

   Solution. Soient $(n,r,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)^T = B^T A^T$.

   (b) Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.

   Solution. Sur les équivalents, il est possible de

   - multiplier,
   - d'élever à la puissance (éventuellement négative et donc de passer à l'inverse),
   - de passer à la valeur absolue,
   - de faire un changement de variable.

   Il est cependant interdit

   - de sommer des équivalents,
   - de composer des équivalents par une fonction,
   - d'écrire équivalent à 0.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de A.

   Solution. Posons $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente d'ordre 3 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Puis

$$N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

   Or les matrices N et I_3 commutent donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
A^n = (I_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\
&= I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} N^k \\
&= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 && \text{car pour tout } k \geqslant 3,\ N^k = O_3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   On note que cette formule reste vraie si $n = 1$ ou $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \cos(x)\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$.
Solution. On sait que
$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$
D'autre part, on a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Dès lors
$$\begin{aligned}\ln\left(1+x^2\right) &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o\left(x^6\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).\end{aligned}$$
Par produit et quotient, on obtient
$$\begin{array}{rcccc} f(x) & \underset{x\to 0}{=} & \multicolumn{3}{l}{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)\right)} \\ & \underset{x\to 0}{=} & x & -\frac{x^3}{2} & +o\left(x^3\right) \\ & & & -\frac{x^3}{2} & +o\left(x^3\right) \\ & & & & +o\left(x^3\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} & x & -x^3 & +o\left(x^3\right). \end{array}$$
Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3 + o\left(x^3\right).}$$