

## Correction de l'interrogation de révision 07

### Ensembles et applications, continuité et dérivabilité

1. (a) Énoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.

*Solution.* Soient  $E$  un ensemble et  $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ . Alors,

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .

- (b) Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.

*Solution.* Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $l \in \mathbb{R}$ ,  $I$  un voisinage de  $a$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors les deux points suivants sont équivalents :

- i.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$
- ii. pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $a$ , on a  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $l$ .

2. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que si  $f$  est surjective alors  $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ .

*Solution.* Soit  $y \in \overline{f(A)}$ . Alors  $y \in F$ . Or  $f$  est surjective donc il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Mais puisque  $y \in \overline{f(A)}$  alors  $y \notin f(A)$ . Supposons  $x \in A$ , alors par définition,  $y = f(x) \in f(A)$ . Contradiction. Donc  $x \notin A$  i.e.  $x \in \overline{A}$ . Dès lors,  $y = f(x) \in f(\overline{A})$ . Conclusion,

$$\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}).$$

3. Montrer que  $f : \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On pourra admettre que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

*Solution.* **Solution.** On a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

Donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 = f(0)$  et on retrouve bien que  $f$  est continue en 0 (ce que l'on pouvait admettre). De plus

$f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin(x)\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\cos(x) - 1)}{x} = \frac{-2\sin(x)x - \cos(x) + 1}{2x\sqrt{x}} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-2x^2 + o(x^2) + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x\sqrt{x}} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-3x^2}{4x^{3/2}} = \frac{-3\sqrt{x}}{4} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$  existe dans  $\mathbb{R}$  et vaut 0. Donc par le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ , on en déduit que

$$f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et donc sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0.$$