

Correction de l'exercice Automne 01

Bijection

1. La fonction carrée et la fonction valeur absolue sont définies sur \mathbb{R} tandis que la fonction logarithme est définie sur \mathbb{R}_+^* . Soit $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Conclusion,

 la fonction f est définie sur \mathbb{R}^* .

On note que \mathbb{R}^* est centré en 0. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = (-x)^2 + \ln(|-x|) = x^2 + \ln(|x|) = f(x).$$

Conclusion,

 la fonction f est paire.

2. Par la question précédente, il est possible dans un premier temps de restreindre l'étude de la fonction sur \mathbb{R}_+^* . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = x^2 + \ln(x).$$

La fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . De plus,

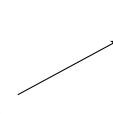
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 + \ln(x)) = 0 - \infty = -\infty,$$

et,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln(x)) = +\infty.$$


Ainsi,

x	0	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$



Par parité, on en conclut le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$



3. On observe que $f(1) = 1^2 + \ln(1) = 1$ et par parité $f(-1) = 1$. Ainsi,

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	$+\infty$				$+\infty$

\swarrow 1 \searrow \swarrow 1 \searrow

Conclusion,

$$f^{-1}([1; +\infty[) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[.$$

4. Par ce qui précède, on observe que

- la fonction f est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$,
- la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Donc par le théorème de la bijection, la fonction f définit une bijection de $]0; +\infty[$ dans $f(]0; +\infty[)$. De plus, $f(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$. Conclusion,

$$f \text{ définit une bijection de }]0; +\infty[\text{ dans } \mathbb{R}.$$

5. On a

- la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$,
- la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$,
- pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ (par la question 1) donc $f'(x) \neq 0$.

Par le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, g est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\frac{2g(x)^2+1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{2g(x)^2+1}.$$

Conclusion,

$$g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{g(x)}{2g(x)^2+1}.$$