Correction de l'exercice Automne 01
Bijection

1. La fonction carrée et la fonction valeur absolue sont définies sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*.}$$

On note que $\mathbb{R}^*$ est centré en 0. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = (-x)^2 + \ln(|-x|) = x^2 + \ln(|x|) = f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

2. Par la question précédente, il est possible dans un premier temps de restreindre l'étude de la fonction sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = x^2 + \ln(x).$$

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x} > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^2 + \ln(x)\right) = 0 - \infty = -\infty,$$

et,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + \ln(x)\right) = +\infty.$$

Ainsi,

x	0		$+\infty$
f	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Par parité, on en conclut le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On observe que $f(1) = 1^2 + \ln(1) = 1$ et par parité $f(-1) = 1$. Ainsi,

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}([1;+\infty[) =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\,.}$$

4. Par ce qui précède, on observe que
   - la fonction f est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$,
   - la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

   Donc par le théorème de la bijection, la fonction f définit une bijection de $]0;+\infty[$ dans $f(]0;+\infty[)$. De plus, $f(]0;+\infty[) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de }]0;+\infty[\text{ dans } \mathbb{R}.}$$

5. On a
   - la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$,
   - la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$,
   - pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ (par la question 1) donc $f'(x) \neq 0$.

   Par le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\frac{2g(x)^2+1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{2g(x)^2+1}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{g(x)}{2g(x)^2+1}.}$$