Correction de l'exercice Automne 02
Trigonométrie

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(2x) - \sin(2x) &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)\right)\\ &= \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ et que $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$. Par conséquent,

$$(I) \qquad \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x) \geqslant -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(2x) - \sin(2x) \geqslant -1.$$

   Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}(I) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -1\\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant 2x + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\pi + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi.\end{aligned}$$

   Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, \frac{\pi}{4} + k\pi\right].}$$