Correction de l'exercice Automne 03
Calcul algébrique

Solution de l'exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque l'on ne sait pas calculer la somme des inverses, l'astuce est d'échanger l'ordre de sommation : sommer d'abord sur j puis sommer sur k. D'après le cours, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{j}.$$

Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, le terme $\frac{1}{j}$ ne dépend pas de la variable de sommation k et donc :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} 1 \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times j = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = n.}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2})$. Il ne faut pas reconnaître une mais deux suites télescopiques :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} (u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) + \sum_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1}). \end{aligned}$$

Puisque les deux sommes obtenues sont télescopiques, on obtient

$$S_n = u_0 - u_{n+1} + u_{n+2} - u_1.$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 - u_1 + u_{n+2} - u_{n+1}.}$