Exercice 3

L'indice externe ne dépend jamais de l'indice interne.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{k=1}^{j} 1 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ A reprendre.

$= j \times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$

$= \sum_{j=1}^{n} 1$

$\boxed{= n}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $\sum_{k=0}^{n} (u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k - 2\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} u_{k+2} \right)$

$= \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) + \sum_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1})$

Oui !

$= -\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1})$

On reconnait 2 sommes télescopiques :

$-\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = -u_{n+1} + u_0$ ✓

$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1}) = u_{n+2} - u_1$ ✓

$\boxed{\text{Donc } \sum_{k=0}^{n} (u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}) = u_{n+2} - u_{n+1} - u_1 + u_0}$

Très bien !