Correction de l'exercice Automne 04
Fonctions usuelles

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(E) \text{ est définie en } x \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 2x \leqslant 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

   Conclusion, l'équation (E) est bien définie sur

$$\boxed{I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].}$$

2. On sait que pour tout $x \in [-1;1]$, $\pi \geqslant \arccos(x) \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{0 \text{ est un minorant et même le minimum de la fonction } \arccos.}$$

3. Soit $x \in I$ une solution de (E). Donc $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ et donc $x \leqslant \frac{1}{2}$. De plus, on a

$$\arcsin(2x) = \arccos(x)$$

   et par la question précédente, $\arccos(x) \geqslant 0$. Donc

$$\arcsin(2x) \geqslant 0 = \arcsin(0) \quad \Leftrightarrow \quad 2x \geqslant 0 \qquad \text{par la croissance de la fonction arcsin.}$$

   Ainsi, $x \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{x \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{1}{2}\right].}$$

4. Posons $f : x \mapsto \arccos(x) - \arcsin(2x)$. La fonction f est définie et même continue sur I. De plus,

$$f(0) = \arccos(0) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0.$$

   D'autre part,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < 0.$$

   Donc $0 \in \left[f\left(\frac{1}{2}\right); f(0)\right]$ et f est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Conclusion, par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{\text{il existe une solution de } (E) \text{ dans } \left[0; \frac{1}{2}\right].}$$

5. *Analyse.* Soit $x \in I$ une solution de (E). Par la question 3, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. DE plus, on a alors les implications suivantes :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \arccos(x) = \arcsin(2x) \\ &\Rightarrow \quad \cos(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(2x)) \\ &\Rightarrow \quad x = \cos(\arcsin(2x)).\end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$. Donc $\cos(u) = \pm\sqrt{1-\sin^2(u)}$. En particulier,

$$\cos\left(\arcsin\left(2x\right)\right) = \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(2x\right)\right)} = \sqrt{1-4x^2} \quad \text{OU} \quad \cos\left(\arcsin\left(2x\right)\right) = -\sqrt{1-4x^2}$$

Or $\arcsin\left(2x\right) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\cos\left(\arcsin\left(2x\right)\right) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\cos\left(\arcsin\left(2x\right)\right) = \sqrt{1-4x^2}.$$

D'où,

$$\begin{array}{rcl} (E) & \Rightarrow & x = \sqrt{1-4x^2} \\ & \Rightarrow & x^2 = 1-4x^2 \\ & \Rightarrow & 5x^2 = 1 \\ & \Rightarrow & x^2 = \dfrac{1}{5} \\ & \Rightarrow & x = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{OU} \quad x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}. \end{array}$$

Or on a vu que $x \geqslant 0$. Donc

$$(E) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Synthèse. Nous avons un seul candidat pour être solution de (E) or on a vu que (E) possède au moins une solution. Conclusion, (E) possède une et une seule solution :

$$\boxed{x \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{5}}{5}.}$$