Exercice Automne 04
Fonctions usuelles

On considère dans $\mathbb{R}$, (E) : $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de (E).
2. Rappeler un minorant simple de la fonction arccos.
3. Montrer que si x est solution de (E) alors $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
4. Sans la chercher, montrer que (E) admet une solution dans $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
5. Résoudre (E).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(2x)$ existe $\Leftrightarrow -1 \leq 2x \leq 1$ ✓
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ✓
donc $\boxed{\arcsin(2x) \text{ est définie sur } [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}$ Oui !

2. La fonction arcosinus est $\boxed{\text{minoré par 0}}$ bien

3. Arcsin(2x) est inférieure à 0 sur $[-\frac{1}{2}; 0]$ ✓ Et supérieur à 0 sur $[0; \frac{1}{2}]$ ✓ Or arcosinus est positif sur ~~sont~~ son intervalle de définition donc $\boxed{\text{si x est une solution de (E) x} \in [0; \frac{1}{2}]}$

Bien.

4. Soit $x \in [0; \frac{1}{2}]$, (E): $\arccos(x) = \arcsin(2x) \Leftrightarrow \arccos(x) - \arcsin(2x) = 0$

Posons $g(x) : \begin{array}{l} [0; \frac{1}{2}] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arccos(x) - \arcsin(2x) \end{array}$

g ~~(x)~~ est Continue sur $[0; \frac{1}{2}]$ ✓ Comme somme de fonctions qui le sont ✓
g ~~(x)~~ est Strictement décroissante Comme somme de fonctions qui le sont ✓

$0 \in [g(\frac{1}{2}); g(0)]$ Non justifié

donc par le Théorème de la bijection, ~~$\forall$~~ $x \in [0; \frac{1}{2}]$, $g(x) = 0$ admet une unique solution donc $\boxed{\text{E admet une unique solution.}}$ Ok !

$\exists\, x \in \ldots$

5. Soit $x \in [0; \frac{1}{2}]$, (E) : $\arccos(x) = \arcsin(2x) \Leftrightarrow \sin(\arccos(x)) = 2x$
Faux !

~~$\Leftrightarrow$~~ $4x^2 = 1 - \cos^2(\arccos(x))$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 1 - x^2$ $\Leftrightarrow$ $x^2 = \frac{1}{5}$ ✓ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

OK

CAR ...

Très bien.