Correction de l'exercice Automne 05
Complexes

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a
$$iz+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad iz=-1 \quad \Leftrightarrow \quad z=-\frac{1}{i}=i.$$

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} \quad & \Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z-2+i}{iz+1}\right)}=\frac{z-2+i}{iz+1}\\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{z}-2-i}{-i\overline{z}+1}=\frac{z-2+i}{iz+1}\\
& \Leftrightarrow \quad (\overline{z}-2-i)(iz+1)=(z-2+i)(-i\overline{z}+1) \qquad \text{car } z\neq i\\
& \Leftrightarrow \quad i|z|^2+\overline{z}-2iz-2+z-i=-i|z|^2+z+2i\overline{z}-2+\overline{z}+i\\
& \Leftrightarrow \quad i|z|^2+\overline{z}-2iz-2+z-i+i|z|^2-z-2i\overline{z}+2-\overline{z}-i=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2i|z|^2-2iz-2i-2i\overline{z} =\\
& \Leftrightarrow \quad |z|^2-(z+\overline{z})-1=0\\
& \Leftrightarrow \quad |z|^2-2\mathrm{Re}(z)-1=0.
\end{aligned}$$

Posons $z=x+iy$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} \quad & \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2x-1=0\\
& \Leftrightarrow \quad (x-1)^2-1+y^2-1=0\\
& \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2=2.
\end{aligned}$$

On obtient le cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. On note que pour i, on a $x=0$ et $y=1$ et donc $(0-1)^2+1^2=2$. Donc $I(i)$ est un point du cercle qui n'est pas solution. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } \Omega(1) \text{ et de rayon } \sqrt{2} \text{ privé du point } I(i).}$$