Exercice Autonome 6) :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\pi k}{3}}\right)$ Oui !

$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}k}}{2^k}\right)$ ✓

$= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\frac{\pi}{3}k}}{2^k}\right)$ ✓

$= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k\right)$

On reconnait une somme géométrique de raison différente de 1 car $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \neq 1$. Bien

$$S_n = \operatorname{Re}\left(\frac{\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} - \frac{e^{i\frac{\pi(n+1)}{3}}}{2^{n+1}}}{1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}}\right)$$

Favorise l'écriture sous forme factorisée.

$$S_n = \mathrm{Re}\left(\frac{\dfrac{2^n e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}(n+1)}}{2^{n+1}}}{\dfrac{2 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}} \right)$$

Multiplie plutôt par le conjugué du dénominateur

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{\dfrac{2^n \times \frac{1}{2} + i \times 2^n \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right)}{2^{n+1}}}{\dfrac{2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \right)$$

V

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{\dfrac{2^{n-1} + i\sqrt{3}\,2^{n-1} - \cos\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right)}{2^{n}}}{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

V

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{2^{n-1} - \cos\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right) + i\left(\sqrt{3}\,2^{n-1} - \sin\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right)\right)}{3 \times 2^{n-1} - i\sqrt{3}\,2^{n-1}} \right)$$

V

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{\left(2^{n-2} - \cos\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right) + i\left(\sqrt{3}\,2^{n-2} - \sin\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)\right)\right)\left(3 \times 2^{n-2} + i\sqrt{3}\,2^{n-2}\right)}{9 \times 2^{2n-2} + 3 \times 2^{2n-2}} \right)$$

$$= \frac{3 \times 2^{2n-2} - 3 \times 2^{n-2}\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right) - 3 \times 2^{2n-2} + \sqrt{3}\,2^{n-2}\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)}{2^{2n-2}(9+3)}$$

$$= \frac{\cancel{3 \times 2^{n-1}} - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right) \cancel{- 3\,2^{n-1}} + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)}{12 \times 2^{n-1}}$$

$$= \frac{-3\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)}{12 \times 2^{n-1}} + \frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)}{12 \times 2^{n-1}}$$

$$\boxed{S_n = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)}{2^{n+1}} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)}{\sqrt{3}\,2^{n+1}}}$$

Bien ! On peut développer le cosinus et le sinus en cos(npi/3) et sin(npi/3) pour simplifier.

2)ii) On a : $T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2^k} \cos\left((k-n)\frac{\pi}{3}\right)$

On a vu : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{\pi}{3} k\right)$

$$= \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right)}{2^{n+1}} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right)}{\sqrt{3}\, 2^{n+1}}$$

On a :

$$T_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2^k} \cos\left((k-n)\frac{\pi}{3}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{\pi}{3}(k-n)\right)$$

Ok

De plus, on remarque que $\sum_{n=1}^{n} \cos\left((k-n)\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left((n-k)\frac{\pi}{3}\right)$

Car cos est paire. Ok

Ok mais à faire dès le début.

On pose $\tilde{k} = k - n \Leftrightarrow k = \tilde{k} + n$

Si $k = 1$, $\tilde{k} = 1 - n$

Si $k = n$, $\tilde{k} = 0$

On a donc, $S_n = \sum_{k=1-n}^{0}$