Correction de l'exercice Automne 06
Calcul algébrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On a les égalités entre les réels suivants :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{3}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k\right).$$

On reconnait alors une somme géométrique de raison $\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \neq 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
S_n &= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \frac{\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n - 1}{\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{2} - 1}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\frac{\pi}{3}}}{2^n} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} - 2}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\frac{\pi}{3}}}{2^n} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} - 2\right)}{\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} - 2\right)\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} - 2\right)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^{in\frac{\pi}{3}}}{2^n} - 1 - 2\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\frac{\pi}{3}}}{2^n} + 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} - 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} + 4}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^{in\frac{\pi}{3}}}{2^n} - 1 - 2\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\frac{\pi}{3}}}{2^n} + 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{5 - 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)}{2^n} + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1}{5 - 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)}{2^n}}{3} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)}{3 \times 2^n} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)}{3 \times 2^n} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3 \times 2^n} \\
&= \frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3 \times 2^n}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3 \times 2^n}.}$$

2. Effectuons le glissement d'indice $\tilde{k} = k - n$, on a

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2^k} \cos\left((k-n)\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \sum_{\tilde{k}=1}^{n} \frac{1}{2^{\tilde{k}+n}} \cos\left(\tilde{k}\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) && \text{car l'indice est muet} \\
&= \frac{S_n}{2^n} \\
&= \frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3 \times 4^n} && \text{par la question précédente.}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{T_n = \frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3 \times 4^n}.}$$