Correction de l'exercice Automne 07
Trigonométrie

1. On sait que pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(p) + \sin(q) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. D'où, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\sin(5x) + \sin(x) = 2\sin\left(\frac{5x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right) = 2\sin(3x)\cos(2x).}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll}
(E) & \sin(5x) + \sin(x) + 2\sin^2(x) = 1 & \\
\Leftrightarrow & 2\sin(3x)\cos(2x) + 2\sin^2(x) - 1 = 0 & \text{par la question précédente} \\
\Leftrightarrow & 2\sin(3x)\cos(2x) - \cos(2x) = 0 & \\
\Leftrightarrow & \cos(2x)(2\sin(3x) - 1) = 0 & \\
\Leftrightarrow & \cos(2x) = 0 \ \text{ OU } \ 2\sin(3x) - 1 = 0 & \\
\Leftrightarrow & 2x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \ \text{ OU } \ \sin(3x) = \dfrac{1}{2} & \\
\Leftrightarrow & x \equiv \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \ \text{ OU } \ 3x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \ \text{ OU } \ 3x \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi] & \\
\Leftrightarrow & x \equiv \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \ \text{ OU } \ x \equiv \dfrac{\pi}{18}\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right] \ \text{ OU } \ x \equiv \dfrac{5\pi}{18}\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right]. &
\end{array}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$