Exercice 08

Bijection

1- Soit $x \in \mathbb{R}$, $f : x \mapsto 4-(x+1)^2$.
$f(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$. ✓
Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$. ✓ ✓
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -2(x+1)$

Il faut toujours parler de dérivabilité avant de dériver.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
var de $f(x)$		↗	$f(-1)=4$	↘	

✓

Oui

$$\lim_{x \to -\infty} 4-(x+1)^2 = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} 4-(x+1)^2 = -\infty$$
✓

Donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

TB

y=4 plutôt

D'après le tableau de variation, la fonction f admet 1 antécédent quand $x = -1$ mais admet 2 antécédent dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. De ce fait, la fonction n'est pas injective. ✓ Par contre la fonction f est surjective.

Non, mal dit.

Non, 5 ou 12 n'a pas d'antécédents.

2- Par la question 1., on sait que : $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[)$ ✓ soit $\boxed{f(\mathbb{R}) =]-\infty;4]}$ Oui !

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	4	↘	3	↘	$-\infty$

$f(0)=3$ ✓

D'après le tableau ci contre, $\boxed{f(\mathbb{R}_-^*) =]-\infty;4]}$

TB !

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	4	↘	3	↘	0	↘	$-\infty$

$f(0)=3$
$f(1)=0$ ✓

D'après le tableau ci contre, $\boxed{f([0;1]) = [0;3]}$ ✓

3- On a $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = f^{\leftarrow}(]-\infty;+\infty[) = f^{\leftarrow}(]-\infty;4[)$ ✓. Donc $\boxed{f^{\leftarrow}(]-\infty;4]) =]\cancel{-\infty;1}[}$

N'a pas de sens.

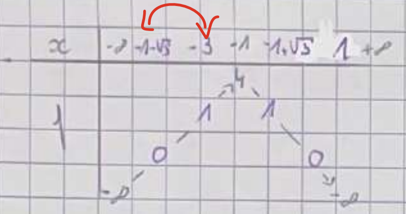
A revoir.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	0	↘	$-\infty$

$f^{\leftarrow}(0)=1$ et $f^{\leftarrow}(0)=-3$

D'après le tableau ci contre, $\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_-^*) =]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[}$

Bien !



~~$f^{-1}(0) = 1$~~ et ~~$f^{-1}(0) = -3$~~

~~$f^{-1}(1) = -1-\sqrt{3}$~~ et ~~$f^{-1}(1) = -1+\sqrt{3}$~~

$\hookrightarrow$ $4 - (x+1)^2 = 1$

$(x+1)^2 = 3$

$x+1 = \sqrt{3}$

$x = \pm\sqrt{3} - 1$

Connecteurs ?

D'après le tableau ci dessus, $\boxed{f^{-1}([0;1]) = [-1-\sqrt{3}\,;-3] \cup [-1+\sqrt{3}\,;1]}$

Oui !

4. Par la question 1, on voit que :

- f est continue sur $[-1\,;+\infty[$
- f est strictement décroissante sur $[-1\,;+\infty[$

Alors d'après le théorème de la bijection, la fonction f définit une bijection de $[-1;+\infty[$ dans $f([-1\,;+\infty[)$.

Or, $f([-1\,;+\infty[) =]-\infty\,;4]$.

En conclusion, $\boxed{f \text{ définit une bijection de } [-1\,;+\infty[\text{ dans }]-\infty\,;4]}$

Parfait !

Soient x et y ...

5. On a φ la restriction de f de $[-1\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;4]$.

De plus, $f(x) = 4-(x+1)^2 = y$

$\Leftrightarrow 4 - (x+1)^2 = y$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4-y$

$\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{4-y}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{4-y} - 1$

A justifier.

Donc $\varphi^{-1} : y \mapsto \sqrt{4-y} - 1$

Conclusion, $\boxed{\begin{aligned} f^{-1} : \ ]-\infty\,;4] &\longmapsto [-1\,;+\infty[\\ y &\longmapsto \sqrt{4-y} - 1 \end{aligned}}$